A szennyeződések terjedésének numerikus modellezése

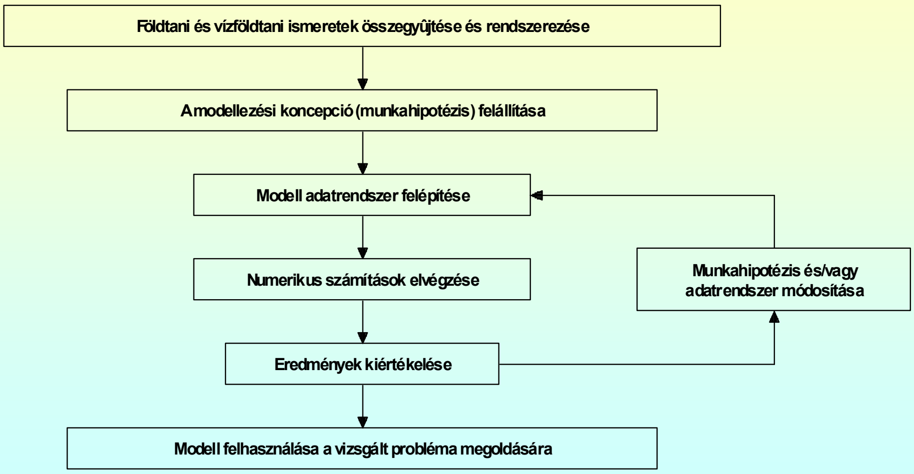
Kovács Balázs
kovacs.balazs@gama-geo.hu
www.gama-geo.hu/kb

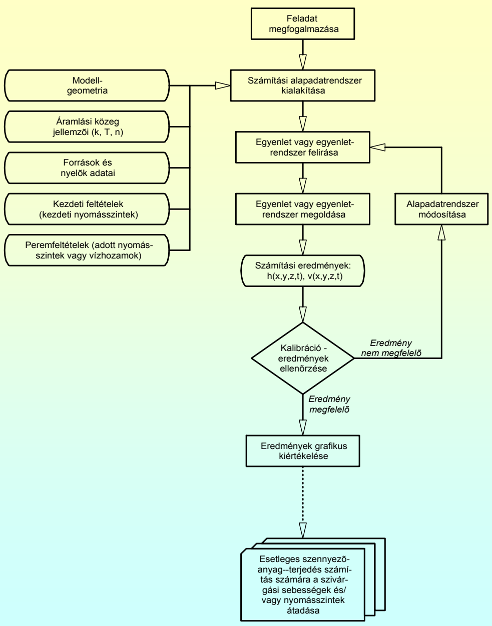
Szent István Egyetem
2008

A számítások fajtái

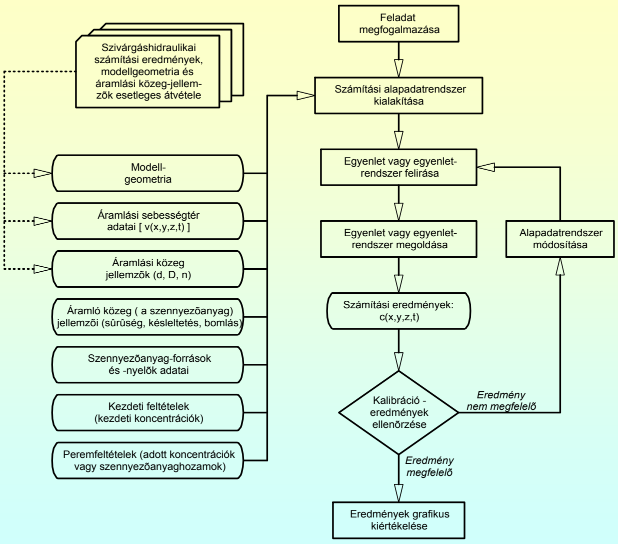
- Hidrodinamikai modellezés
  - Célja:
    - Potenciál (vízszintek) meghatározása (depresszió)
    - Szivárgás irányának meghatározása
    - Szivárgási sebesség meghatározása
    - Áramvonalak meghatározása
- Transzportmodellezés
  - Célja:
    - Koncentráció-eloszlások meghatározása
    - Szennyezőanyagok terjedési sebességének meghatározása
    - Szennyeződések terjedési irányainak meghatározása
- Hőtranszport - modellezés
  - Célja:
    - Hőmérséklet-eloszlások meghatározása

A modellezési munkafolyamat





A hidrodinamikai számítások folyamata



A transzport számítások folyamata

A modellezési számítások lépései

- 1. Előkészítés
  - feladat megfogalmazása
  - konkrét megválaszolandó kérdések
  - elvárható eredmények számbavétele
  - lehetséges egyszerűsítések átgondolása (szimmetriák, dimenziószám, stb.)
  - a modellezendő területrész lehatárolása
  - számítási megoldások átgondolása (szoftverválasztás)
- 2. Földtani és vízföldtani adatgyűjtés
  - meglévő adatok és pótlandó adatok
  - új „kutatási” feladatok kijelölése
  - szakirodalmi áttekintés és új aktuális adatok beszerzése
  - ellentmondásmentes földtani és vízföldtani adatrendszer kialakítása
  - koncepcionális vízföldtani séma kidolgozása

A modellezési számítások lépései

- 3. Első számítási fázis
  - próbaszámítások elvégzése
  - további adathiányok meghatározása
  - a koncepcionális modell esetleges ellentmondásaink feloldása
  - problémák: rossz peremfeltételek, adathiányos területek, becsült és szakirodalmi adatok okozta hibák, stb.
  - eredmény: egy átdolgozott vízföldtani koncepció, amely számításra alkalmas
- 4. Modell kalibrálása és paraméterérzékenységi vizsgálat
  - kalibrálás: Olyan paraméter-kombináció létrehozása, mely megfelele a koncepciónak és az ismert valós folyamatok legpontosabb szimulációját teszik lehetővé
  - paraméterérzékenységi vizsgálat: a paraméterek lehetséges szélsőértékei eredményekre gyakorolt hatásának vizsgálata
  - cél egy olyan kalibrált modell létrehozása, ahol ismert az egyes paraméterek eredményekre gyakorolt kedvezőtlen hatásának mértéke (egyes paraméterek nagyon, mások kevésbé befolyásolják a végeredményt)

A modellezési számítások lépései

- 5. Második számítási lépcső
  - az 1. lépcsőben előírt kérdések megválaszolása a számításokkal
  - előrejelzések elkészítése
  - legkedvezőbb és legkedvezőtlenebb lehetőségek vizsgálata
  - eltérő termelési, mentesítési helyzetek számítása
- 6. Eredmények kiértékelése
  - térképi ábrázolások
  - térbeli ábrázolások
  - animációk
  - a feltett kérdések megválaszolása
  - az eredmények bizonytalanságainak összegzése
  - a célnak megfelelő modelladaptációk elkészítése

1. rész
A modellek fajtái, folyamata és lépései

Mi a modellezés ?

- A **MODELL** a valós rendszer egyszerűsített, sematikus transzformációja.
- A modell nem a valós rendszer!
- A szimuláció sematikus, nincs minden tulajdonság reprezentálva.
- Ugyanaz a valós rendszer másképpen van modellezve eltérő célok esetén.

↓

Nincs univerzális modell !

- Egy modellt mindig lehet javítani, de soha nem lesz az eredeti valós rendszer.
- A modell „jósága” csak a probléma ismeretében dönthető el.
- Ha a célt elérem, akkor a modell jó!
- Két azonos tudású modell közül az egyszerűbb a jobb!
- Két féle modellezés létezik: az eredményes és a tanulságos.
- A modellezés kreatív játék!

Modellek fajtái

Fizikai modell: kisebb léptékben megépítjük a modellezett tér egyszerűsített mását „terepasztal modell”

Analóg modell: egy már ismert, matematikailag leírt jelenséggel kapcsolatos hasonlóságra épít; az áramlási egyenletek tulajdonképpen ugyanazok, mint a hő, elektromosság vagy mágneses mező áramlási egyenletei

Matematikai modell: a felszín alatti vízáramlást leíró egyenletek megoldása (szivárgás alapegyenlete)

- analitikus modell: egzakt, matematikai megoldást ad, pontszerű esetben vagy homogén környezeti viszonyok között alkalmazható
- numerikus modell: a szivárgás alapegyenletének közelítő, nem egzakt megoldásai; a numerikus megoldások mind időben, mind térben szakaszolják a lezajló folyamatokat úgy, hogy az egyes szakaszokon belül a számításhoz szükséges paramétereket állandónak tekintik
- szemianalitikus modell: az alapegyenletet analitikusan oldja meg, amíg megoldható, majd numerikus számítással folytatja

Numerikus modellek

Felszín alatti vizek szivárgásának jellemzőit az alábbi numerikus módszerekkel lehet vizsgálni:

- véges differencia módszer
- véges elem módszer
- perem elem módszer
- analitikus elemek módszere

Véges differencia módszer: a modellezett teret tetszőleges darabszámú, de azonos eloszlású , egymással érintkező téglatest alakú elemekre bontjuk, a szivárgás alapegyenletét leíró parciális differenciál-egyenletet differencia egyenletté alakítjuk és az egyes elemek közötti vízforgalmat numerikus, iteratív eljárásokkal megoldjuk

Véges elem módszer: a modellezett tér tetszőleges csomópontú felosztását teszi lehetővé és az azokat összekötő vonalak által határolt elemekre bontja, melyek nem oldalukkal hanem csomópontjukkal illeszkednek egymáshoz; az egyes elemek mentén a keresett attribútum értékét előre felvett paramétereket tartalmazó függvényekkel közelíti, majd a szomszédos elemek határai mentén valamilyen hibaelv alapján illeszti (lokális approximáció elve)

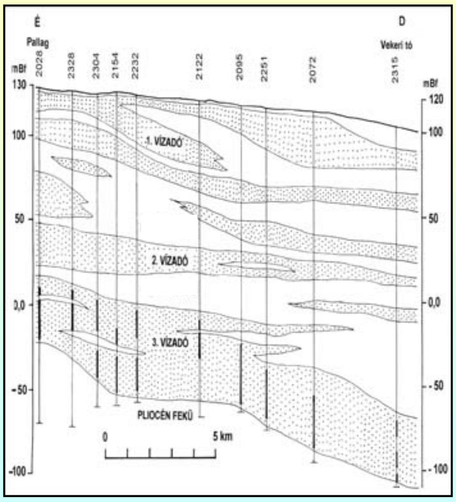
2. rész
Hidrogeológiai alapfogalmak, a Darcy-törvény, a szivárgási tényező és értelmezése

Alapfogalmak I.

Képződmények osztályozása:

- Vízvezető képesség szerint
  - Vízadó és vízrekesztő képződmények („vízzáróság”)
- Fázisok száma szerint
  - Telített (2 fázis) és telítetlen (3 fázis) közeg
- Nyomásviszonyok alapján
  - Nyílt tükrű, zárt tükrű vagy vegyes tükrű
- Víztároló közeg szerint
  - **karsztos** (mészkövek és dolomitok) és **hasadozott** vagy repedezett **kőzet**ek (bazalt, andezit, dolomitmurva, stb.) vizei
    - nyílt rendszerek
    - fedett rendszerek
  - porózus kőzetek vizei
    - parti szűrésű rendszerek
    - talajvízadók
    - rétegvízadók

Hidrosztratigráfia



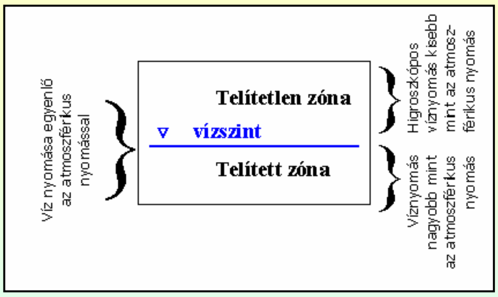
Képződmények osztályozása vízvezető képesség szerint (Vízadó és vízrekesztő képződmények)

Vízadó (Aquifer):
földtani egység, amely képes tárolni és szállítani a vizet úgy, hogy a vízadó kutakat táplálja. Ez általában konszoli-dálatlan homok, kavics, vagy homokkő, mészkő, dolomit, esetleg repedezett magmás vagy metamorf kőzet.

Vízzáró, vízrekesztő (Confining layer):
földtani egység, amelynek nagyon kicsi a permeabilitása, rossz a vízvezető képessége. A vízadókat vízzáró rétegek fogják közre. A víz csak nagyon lassan tud átszivárogni rajta, bár víztároló képessége lehet jó.

Félig áteresztő rétegek:
A hazai gyakorlatban célszerűbb **féligátersztő** vagy **átszivárgó (leaky confining layer)** rétegről beszélni a jellegzetesen nem vízadó vagy vízzáró képződmények esetében.

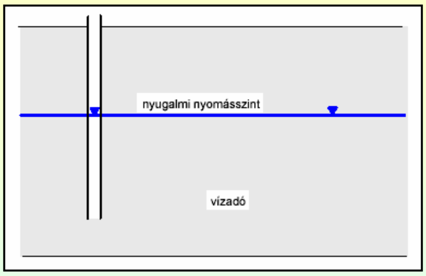
Víz a felszín alatt: osztályozás a fázisok száma szerint

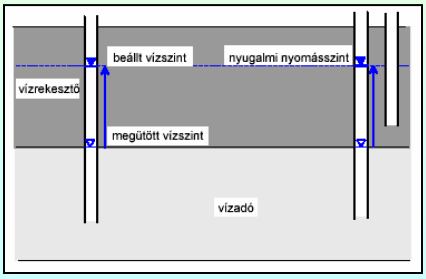


TALAJNEDVESSÉG ZÓNÁJA: Háromfázisú telítetlen zóna, szemcsék közötti hézagok vizet és levegőt egyaránt tartalmaznak. A szemcséket kétrétegű hidrátburok veszi körül, melynek belső rétegét a gyökerek szívóereje sem képes leszakítani.

TALAJVÍZTÜKÖR: Kétfázisú, telített zóna határa. Jellemzője, hogy a tényleges nyomás a légköri nyomással egyezik meg. Néhány cm-től, néhány 10 m-es mélységben található.

Vízadó képződmények osztályozása a nyomásviszonyok alapján





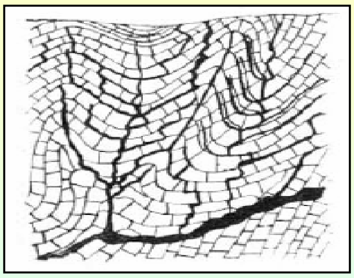
Nyílt tükrű vízadó (Unconfined):
a víz nyomásszintje – azaz a víztükör – a képződmény fedő szintje alatt van, ennek megfelelően a víz szintje a légnyomással tart egyensúlyt.

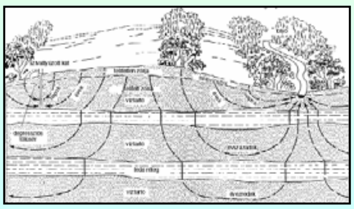
Zárt tükrű vízadó (Confined):
a víz nyugalmi nyomásszintje a fedő szint felett van; szemléletesen nyomás alatti vízadónak is nevezzük.

Szokás megütött és beállt vízszintről beszélni zárt tükrű rendszerek esetén. Az előbbi a vízadó fedőszintjét jelzi, az utóbbi pedig a nyugalmi nyomását

Vegyes tükrű (térben vagy időben változik)

Vízadó képződmények osztályozása a víztároló kőzet szerint



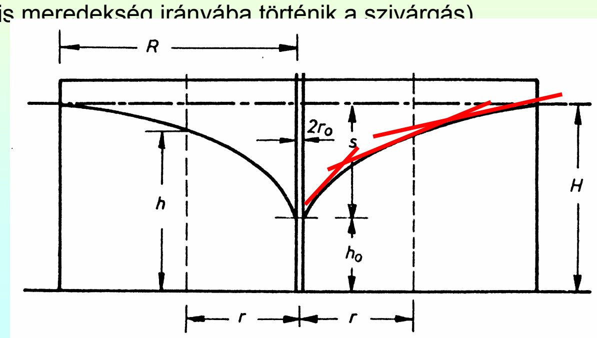


Karsztos ill. repedezett vízadó :
jellemzőjük, hogy nem az elsődleges (képződésükkel egyidejű) pórusok hanem inkább a másodlagosan kialakuló repedések, törések – melyek karbonátos képződmények esetén karsztosodhattak – tárolják ill. vezetik a vizet. A felszín felöli szennyezések általában gyorsan, késleltetés nélkül juthatnak le a hasadékvízszintig.

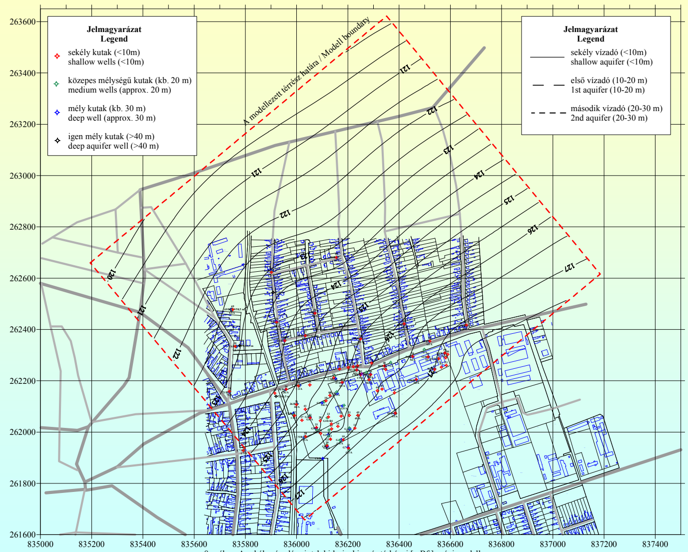
Porózus vízadó:
anyaga konszolidált vagy konszolidálatlan homok, kavics. Szokás talajvíz és rétegvízadó, illetve partiszűrésű vízadókra osztani. Utóbbi jó vízvezető képességű, jelentősebb vízfolyások közelében található, ahol a folyó menti rétegek vize közvetlen kapcsolatban van a vízfolyással.

A hidraulikus gradiens

Hidraulikus gradiens (*I=dh/dl* hányados)
- *=hidraulikus esés*
- *arányos a közeg ellenállásával (egységnyi hosszon mekkora szivárgás közben a nyomásesés)*
- dimenziónélküli szám
-a szivárgás irányát a hidraulikus gradiens iránya határozza meg
(h mint folytonos h(x,y,z) térfüggvény hely szerinti deriváltja a hidraulikus gradiens, a maximális meredekség irányába történik a szivárgás)



A hidraulikus gradiens



8.a. ábra: A sekély víyadó szintek hidroizohipszás térképei [mBf.] - régi modell
Fig.8.a.: Potentiometric surfaces of the shallow layers [mBf.] - old model

Darcy-törvény I.

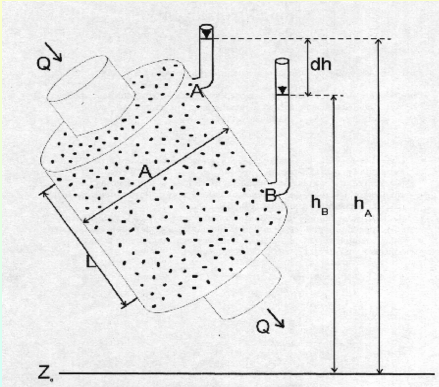
$$Q = k \cdot A \frac{dh}{L} = k \cdot A \frac{h_A - h_B}{L}$$

ahol Q: egységnyi idő alatt átáramló vízmennyiség $[L^3/T]$;

h_A-h_B: vízoszlop magassága A,B pontban [L];

L: A és B pontok távolsága [L];

k: szivárgási tényező (k tényező) [L/T]



$$Q = k \cdot A \cdot \frac{dh}{dl} = k \cdot A \cdot I$$

ahol I: hidraulikus gradiens, hidraulikus esés [m/m]; kI: a szivárgás átlagos lineáris térfogati sebessége

Darcy-törvény II.

Darcy törvény különbségekkel felírva: ***Q = K A (dh/dl)***

- Az *i = dh/dl* hányadost hidraulikus gradiensnek, más néven hidraulikus esésnek nevezzük. (Dimenzió nélküli mennyiség [L/L]!) Horizontális és vertikális, azaz vízszintes és függőleges komponensét is szokás értelmezni. A két komponens eredője mutatja meg a szivárgás irányát.
- Az áramlás irányát döntően nem a nyomás és nem a térfelszín határozza meg, hanem a *„h"* értéke.
- A *„h"* az egységnyi tömegű folyadék által tartalmazott mechanikai energia mértékét jellemzi.
- Ha a Darcy által felírt egyenletet osztjuk a cső keresztmetszetével kapjuk a az áramlás intenzitást vagy fluxust (*q*). Dimenziója [L/T].

  q = K (dh/dl) ezt nevezzük Darcy-féle sebességnek v_D

  A valódi sebesség a Darcy-féle sebesség osztva a szabad hézagtérfogattal:

  $\boldsymbol{v = v_D/n_0}$

Szivárgási tényező

- Jele:
  - K (angolszász irodalom)
  - k (egyes hazai műhelyek)
- „sebesség” dimenziójú [L/T].
- egyaránt jellemzi a fluidumot és a közeget, amelyben a folyadék áramlik (értéke függ az áramlási és az áramló közegtől is, King Hubert (1956))
- áramló közeg jellemzőitől függő rész
  - fajsúly (egyenes arányosság)
    - sűrűség
    - nehézségi gyorsulás (g)
  - viszkozitás (fordított arányosság)
    - egyes fluidumok viszkozitása erősen hőmérsékletfüggő
- áramlási közegtől függő rész
  - szemcsék alakja
  - szemcsék mérete (átmérő négyzete)

Permeabilitás - áteresztőképesség

Belső permeabilitás

Az áramlási közegre jellemző paraméterek szorzatát (belső) permeabilitásnak nevezzük és K_i –vel (egyes helyeken K-val) jelöljük. $K_i = C\,d^2$

- a fentiek alapján:

$$K_i = C \cdot d^2,\ k = K_i \frac{\gamma}{\mu} = K_i \frac{\rho g}{\mu},\ illetve\ K_i = k \frac{\mu}{\rho g}$$

- felület dimenziójú [L^2]
- *független az áramló közegtől, ezért alkalmazzák pl. az olajiparban, hidrogeológiában a víz kisebb sűrűség és viszkozitás-változása miatt a szivárgási tényező használata az elterjedtebb.*
- a (belső) permeabilitás mértékegysége a „darcy”
  1 darcy = 9,87 x 10^{-9} cm^2; 1 milidarcy = 9,87 x 10^{-12} cm^2

Megjegyzés

- A folyadék sűrűsége - és így a szivárgási tényező - hőmérséklet függő, ezért víz esetében standard értéknek 15,6 °C víz sűrűségét veszik alapul.

A transzmisszivitás

- A transzmisszivitás a réteg vízadó képességét jellemzi
- A szivárgási tényező és a rétegvastagság szorzata (T=k.m)
- Mértékegysége: $[L^2/T]$

Porozitás

A porózus közegben a pórusok térfogatának és a teljes térfogatnak az arányát **hézagtérfogatnak** vagy idegen szóval porozitásnak nevezik (jele: n).

A teljes pórustérnek azonban csak egy részében történik szivárgás, a szemcsék körül kötött hidrátburok, a szemcsék mellett szegletvíz, zárt pórustérben található vizek, illetve kapilláris erők által kötött vízmolekulák is vannak. A víz mozgásában részt vevő pórustér térfogatának és a teljes térfogatnak az arányát **szabad hézagtérfogatnak vagy effektív porozitásnak nevezik** (jele: n_0). A definíció alapján triviális, hogy a szabad hézagtérfogat a hézagtérfogatnál mindig kisebb szám.

Szokásos még a **hézagtényező** (e) használata is, mely a pórustérfogatnak a szemcsék térfogatához viszonyított aránya. A definíció alapján a hézagtérfogat 1-nél kisebb, valójában 0,35-nál kisebb érték, míg a hézagtényező értéke speciális esetekben, pl. szerves agyagok vagy tőzeges képződmények 1-nél nagyobb is lehet. A teljes és a szabad hézagtérfogat, valamint a hézagtényező dimenziónélküli szám $[L^3/L^3]$.

Porozitás (hézagtényező és hézagtérfogat)

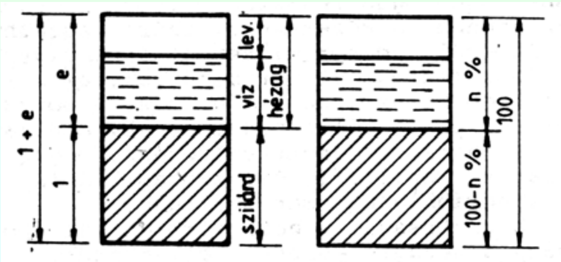
Hézagtérfogat:

$$n = \frac{V_p}{V_p + V_{sz}} = \frac{V_p}{V_{teljes}}$$

ahol V_p a pórusok térfogata, V_{sz} a szemcsék térfogata, V_{teljes} a teljes minta térfogata.

Hézagtényező:

$$e = \frac{V_p}{V_{sz}}$$



$$e = \frac{n}{1-n}; \quad n = \frac{e}{1+e}.$$

Porozitás (hézagtényező és hézagtérfogat)

A hézagtényező és hézagtérfogat laboratóriumi meghatározása:

- Egy V térfogatú mintát kiszárítunk és a száraz állapothoz tartozó M_0 tömegét lemérjük. Feltételezve, hogy a szemcsék sűrűsége ρ_s a hézagtérfogat és a hézagtényező számítható:

$$e = \frac{V - \frac{M_0}{\rho_s}}{\frac{M_0}{\rho_s}}, \quad n = \frac{V - \frac{M_0}{\rho_s}}{V}$$

Képződmény	Szemcsék sűrűsége [kg/m^3]
Kavics, homok	2650
Lösz, homokliszt, homokos iszap	2670
Iszap	2700
Sovány agyag	2750
Agyag	2800

A szabad hézagtérfogat

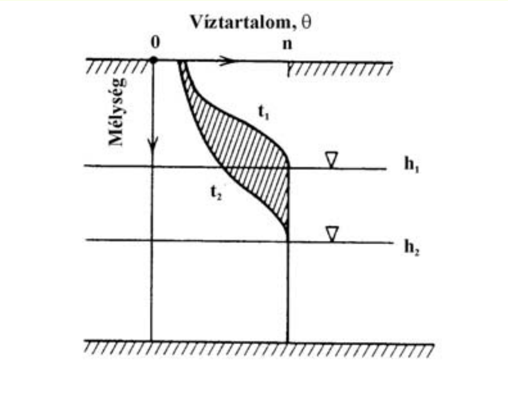
- A szabad hézagtérfogat az a hézagtérfogat, melyben a víz a gravitáció hatására mozogni képes

$$n_0 = \frac{V_{p0}}{V_p + V_{sz}} = \frac{V_{p0}}{V_{teljes}} \quad \leq \quad n$$

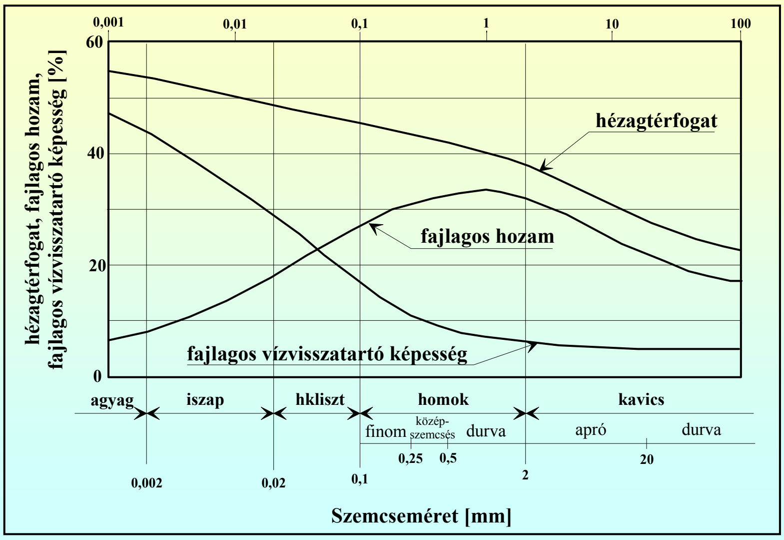
ahol V_p a pórusok térfogata, V_{sz} a szemcsék térfogata, V_{teljes} a teljes minta térfogata és V_{p0} azon pórusok térfogata, amiben a víz a gravitáció hatására mozogni képes.

A fajlagos vízleadás –specific yield

A nyílt tükrű rendszerben a víztárolási képességet a fajlagos hozammal jellemezhetjük. A fajlagos hozam az a vízmennyiség, amennyi felszabadul egy egységnyi felületű, nyílt tükrű vízadóból miközben a nyomásszint egységnyit csökken.



Képződmények víz visszatartó képessége



Telítettség

- A telítettség (S, szaturáció) mutratja meg, hogy a pórusok mekkora térfogati hányadában tartalmaz vizet.
- 0 < S < 1
- ha S=1, akkor telített a közeg

$$S = \frac{V_{víz}}{V_p}$$

A vízhozam

- Az időegység alatt mozgó folyadék mérőszáma (kitermelt vagy felületen időegység alatt átáramló „vízmennyiség”)
- mértékegysége [L^3/T]
- a vízmennyiséget térfogattal mérik [L^3]

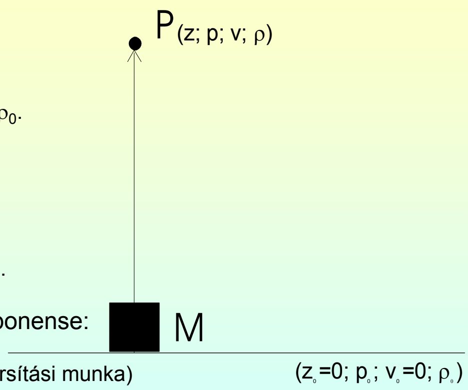
3. rész
A potenciál értelmezése

A potenciál

- *„Egy olyan fizikai mennyiség, amely egy áramlási közeg bármely pontjában meghatározható és amely nagyságával meghatározza térbeli irányultságtól függetlenül a szivárgás irányát oly módon, hogy a szivárgás mindig a nagyobb potenciálú hely felől a kisebb potenciálú hely felé történik. (King Hubbert, 1956*)
- Abszolút nagysága nem mérhető, csak a változás mértéke
- Viszonyítási helyhez képest mérjük
- Szivárgás: A *folyadék szivárgási potenciálját a porózus közegben a folyadék tömegegységre vonatkoztatott mechanikai energiájaként értelmezzük.* A potenciál megváltozása az a munka, amit be kell fektetni vagy nyerünk, miközben a vizsgált folyadék az áramlási térben az egyik pontból egy másik pontba jut.

A végzendő munka meghatározása

- Kiinduló állapot:
  - Magasság: Z=0
  - Nyomás: $p=p_0$.
  - Folyadék sűrűség: ρ_0
  - Tömegegységnyi térfogat: $V_0=1/\rho_0$.
  - Szivárgási sebesség: v=0
- Végállapot P helyen:
  - Magasság: z
  - Nyomás: p.
  - Folyadék sűrűség: ρ
  - Tömegegységnyi térfogat: $V=1/\rho$.
  - Szivárgási sebesség: v
- A szükséges munka három komponense:
  - W_1: z magasságra emelés
  - W_2: v sebességre gyorsítás (gyorsítási munka)
  - W_3: ρ sűrűségre változtatás (tágulási munka)



$$W = w_1 + w_2 + w_3 = mgz + \frac{mv^2}{2} + m\int_{p_0}^{p} \frac{V}{m} dp = mgz + \frac{mv^2}{2} + m\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}$$

A potenciál a tömegegységre vetített munka

$$W = w_1 + w_2 + w_3 = mgz + \frac{mv^2}{2} + m\int_{p_0}^{p} \frac{V}{m} dp = mgz + \frac{mv^2}{2} + m\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}$$

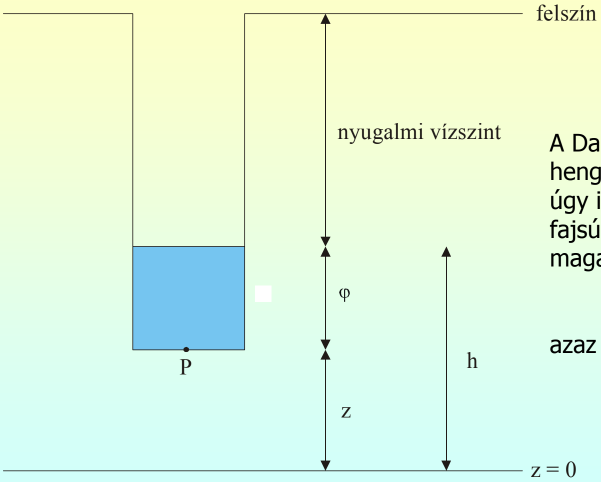
$$\Phi = gz + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^{p} \frac{V}{m} dp = gz + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}$$ (Bernoulli-egyenlet)

Porózus közegbeli szivárgás:

- Szivárgási sebesség kicsi – gyorsítási munka elhanyagolható
- A folyadéksűrűség állandónak tekinthető

$$\Phi = gz + \frac{p - p_0}{\rho}$$ (Hubbert-féle energia-egyenlet)

Vízoszlop nyomó magassága



$$\varphi = h - z$$

A Darcy törvényben szereplő henger két végén mért nyomás úgy is kiszámítható, hogy a víz fajsúlyát (g) szorozzuk a vízoszlop magasságával (φ):

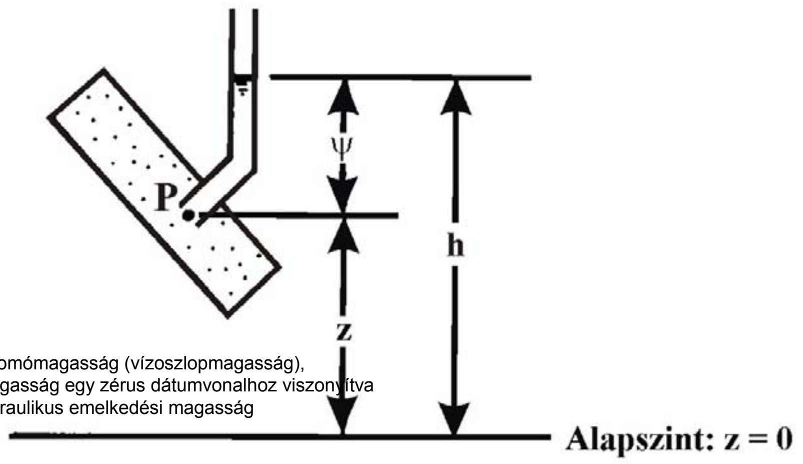
$$P = \gamma\varphi$$

azaz

$$P = \rho g \varphi$$

A ψ nyomómagasság, a z magasság és a h hidraulikus emelkedési magasság (hidraulikus nyomás) értelmezése

A P helyen a folyadék p nyomása: $p = \rho g \psi + p_0 = \rho g (h - z) + p_0$



ahol
- ψ nyomómagasság (vízoszlopmagasság),
- z magasság egy zérus dátumvonalhoz viszonyítva
- h hidraulikus emelkedési magasság

A potenciál értelmezése

A potenciál a hidraulikus nyomás és a nehézségi gyorsulás szorzata (Az egységnyi tömegre eső energiatartalom egyenlő a hidraulikus nyomás (emelkedési magasság) és a nehézségi gyorsulás szorzatával!):

$$\Phi = gz + \frac{p - p_0}{\rho} \qquad p = \rho g \psi + p_0 = \rho g (h - z) + p_0$$

$$\Phi = gz + \frac{[\rho g (h - z) + p_0] - p_0}{\rho} = gh$$

4. rész
A szivárgás alapegyenlete(i)

A szivárgás alapegyenlete

- A szivárgást írja le
  – Telített vagy telítetlen közegben
  – Permanens vagy nem permanens esetben

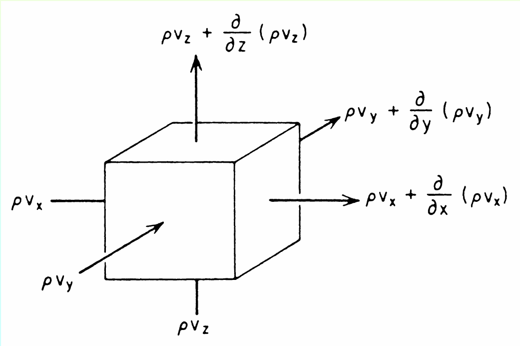
- Alapja:
  – A folyadékok tömegmegmaradása (kontinuitása)
  – Szivárgást leíró alapösszefüggés

Szivárgás alapegyenlete
telített közeg, permanens eset

A vizsgált térrészbe be- és kilépő vízhozamok („tömegfluxusok”) egyenlősége:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

ahol ρ az áramló folyadék sűrűsége és v_x, v_y és v_z a szivárgási sebességvektor komponensei .



v_i a Darcy törvényből megismert „intenzitás” (átlagos lineáris térfogati sebesség, ρ a folyadék sűrűsége, akkor ρv_i tömegáramlási sűrűség vagy tömegfluxus i irányban. A kiáramló tömegfluxus a beáramló és a változás összege.

Szivárgás alapegyenlete
telített közeg, permanens eset

A vizsgált térrészbe be- és kilépő vízhozamok egyenlősége:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

ρ folyadéksűrűség állandó

ρ Folyadéksűrűség kiemelhető

ρ folyadéksűrűség változó

lánc-szabály : $\rho \frac{\partial v_i}{\partial i} \gg v_i \frac{\partial \rho}{\partial i}$

ahol i a szivárgás x, y vagy z iránya

Mind összenyomható, mind összenyomhatatlan folyadék esetére

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Szivárgás alapegyenlete telített közeg, permanens eset

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Felhasználva a Darcy-törvényt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = 0$$

Izotróp közegre ($k_x=k_y=k_z$)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

(Laplace- egyenlet)

Szivárgás alapegyenlete telített közeg, nem permanens eset

Nem permanens szivárgás vizsgálatához szükséges közegjellemzők:

- Fajlagos tárolási tényező (S_s)
- Tárolási tényező (S)
- Fajlagos vízleadás (S_y)

Levezetéshez szükséges paraméterek:

- ρ folyadék-sűrűség,
- μ folyadék-viszkozitás,
- β folyadék-kompresszibilitás,
- n közeg hézagtérfogat
- e közeg hézagtényezője,
- α közeg-kompresszibilitás
- K áteresztőképesség

A víztárolás mechanizmusának jellemzői

- A nyomásváltozás hatására a képződményen belüli feszültségviszonyok rendeződnek át
  - Hatékony feszültségek: kőzetek szemcséin keresztül átadódó feszültségek
  - Semleges feszültségek: a pórusfolyadékon keresztül átadódó feszültségek – ezt változtatjuk meg
- Nyomásemelkedéskor a semleges feszültségek nőnek, a hatékony feszültségek csökkennek
- Nyomáscsökkenéskor a semleges feszültségek csökkennek és a hatékony feszültségek nőnek
- Tárolt vízmennyiség változás okai:
  - Kőzetmátrix összenyomódása vagy tágulása (hatékony feszültség változás), mely a kőzet összenyomhatóságától, kompresszibilitásától függ
  - Pórusfolyadék összenyomódása vagy tágulása (semleges feszültség változás)
    mely a pórusfolyadék összenyomhatóságától, kompresszibilitásától függ

A fajlagos tárolási tényező és a tárolási tényező

A fajlagos tárolási tényező az egységnyi nyomásszint-változás hatására a kőzet kompressziója miatt, illetve a víz tágulása miatt felszabaduló vízmennyiség összege

Kőzet kompressziója

Víz tágulása

Fajlagos tárolási tényező

A fajlagos tárolási tényező és a tárolási tényező

A fajlagos tárolási tényező az egységnyi nyomásszint-változás hatására a kőzet kompressziója miatt, illetve a víz tágulása miatt felszabaduló vízmennyiség összege

Kőzet kompressziója

$$dV_w = \alpha\rho g$$

Víz tágulása

$$dV_w = \beta n\rho g$$

Fajlagos tárolási tényező

A fajlagos tárolási tényező és a tárolási tényező

A fajlagos tárolási tényező az egységnyi nyomásszint-változás hatására a kőzet kompressziója miatt, illetve a víz tágulása miatt felszabaduló vízmennyiség összege

Kőzet kompressziója

$$dV_w = \alpha\rho g$$

Víz tágulása

$$dV_w = \beta n\rho g$$

$$S_s = \rho g(\alpha + n\beta)$$

A fajlagos tárolási tényező dimenziója [1/L], általában 1/m.
Egy telített rétegben (zárt tükrű vízadó) a transzmisszivitás T=km és a **tárolási tényező** definíciószerűen $S=S_s m$ [-]:

$$S = S_s m = \rho g m(\alpha + n\beta)$$

Szivárgás alapegyenlete telített közeg, nem permanens eset

A tömegmegmaradás törvénye: a kiválasztott térrészbe adott időegység alatt be- és kilépő hozamok előjeles összege azonos az adott térrészben tárolt vízmennyiség tömegváltozásával.

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho n)}{\partial t}$$

n – hézagtérfogat, t - idő, v - szivárgás sebessége, ρ - sűrűség

Lánc-szabállyal:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = n\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial n}{\partial t}$$

a víz rugalmas tágulása miatt keletkező vízmennyiséget jelenti miközben ρ sűrűsége változik (β függvénye)

a közeg összenyomódása miatt keletkezik miközben az n hézagtérfogat megváltozik (α függvénye)

Szivárgás alapegyenlete telített közeg, nem permanens eset

Felhasználva a fajlagos tárolási tényezőt a ki és belépő vízmennyiség előjeles összege:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \rho S_s \frac{\partial h}{\partial t}$$

mivel $\rho\frac{\partial v_x}{\partial x} >> v_x\frac{\partial \rho}{\partial x}$ (Elhanyagolható !)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial h}{\partial z}\right) = S_s\frac{\partial h}{\partial t}$$

Nem permanens szivárgás alapegyenlete

Szivárgás alapegyenlete telített közeg, nem permanens eset

Izotróp közegre (diffúzió-egyenlet):

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{S_s}{k}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g(\alpha + n\beta)}{k}\frac{\partial h}{\partial t}$$

Az áramlási térben a nyomásszintek változása a térben és az időben a k szivárgási tényező, α közeg összenyomhatóság és n hézagtérfogattól, mint közegjellemzőtől, és a folyadék β összenyomható-ságától és ρ sűrűségétől függ.

Amennyiben egy állandó, m vastagságú horizontális vízadót tekintünk, akkor a tárolási tényező $S=m \cdot S_S$, illetve a transzmisszivitás $T=k \cdot m$ és ekkor

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}$$

Az egyenlettel számítható a x, y síkbeli koordináták függvényében a piezometrikus szint, amennyiben a vízadó T transzmisszivitása és S tárolási tényezője ismert.

A szivárgás alapegyenletének megoldási módjai

- **Analitikus megoldások**
  - Valódi analitikus megoldások
    - Dupuit-Thiem megoldás
  - Szemi-analitikus megoldások
    - Theis-Jacob megoldás
    - Hantush-féle megoldás
    - Neumann-féle megoldás
    - Tóth-féle megoldás
    - …
- **Numerikus megoldások**
  - Szemi-numerikus megoldások
    - Analitikus elemek módszere
    - Halász-Szőke-féle rétegzett tároló modell (ARV)
    - …
  - Valódi numerikus megoldások
    - Véges differencia-módszer
    - Végeselem módszer
    - Peremelem-módszer

5. rész
A szivárgás alapegyenletének analitikus megoldási lehetőségei

Analitikus megoldások – Dupuit
Végtelen galéria, zárt tükrű rendszer

$$\frac{d^2h}{dx^2} = 0, \text{ mert } \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \text{ és } \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

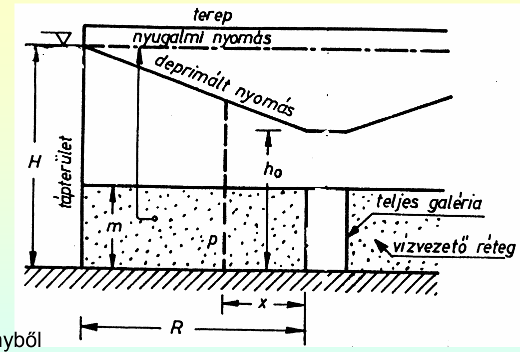
$$\frac{dh}{dx} = K_1$$

$$h = K_1 x + K_2$$

Peremfeltételekből:

$$K_2 = h_0 \quad \text{és} \quad K_1 = \frac{H - h_0}{R}$$

$$h = \frac{H - h_0}{R} x + h_0$$



Szivárgási sebesség a Darcy-törvényből

$$v = kI = k\frac{dh}{dx} = k\frac{H - h_0}{R}$$

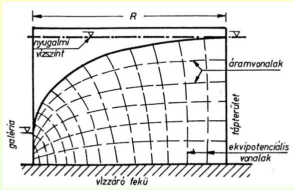
Féloldali hozam egységnyi hosszon:

$$q_g = mv = mk\frac{H - h_0}{R}$$

Analitikus megoldások – Dupuit
Végtelen galéria, nyílttükrű rendszer

Szivárgási sebesség a Darcy-törvényből

$$v = kI = k\frac{dh}{dx}$$



Féloldali hozam egységnyi hosszon:

$$q_g = A \cdot v = h \cdot 1 \cdot v = h \cdot kI = kh\frac{dh}{dx}$$

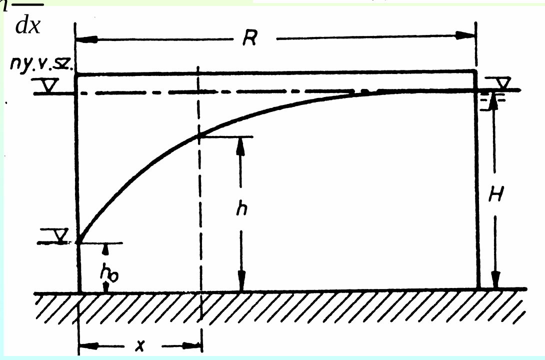
$$q_g\,dx = kh\,dh$$

$$q_g\left[x\right]_0^R = k\left[\frac{h^2}{2}\right]_{h_0}^{H}$$

$$q_g = k\frac{H^2 - h_0^2}{2R}$$

Depresszió-görbe egyenlete:

$$h = \sqrt{\frac{2q_g}{k}x + h_0^2}$$



Analitikus megoldások – Dupuit-Thiem
Magányos kút, zárt tükrű rendszer

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0, \text{ mert } \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Polár koordináta-rendszerre áttérve:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial r} = K_3 \ln r$$

$$h = K_3 \ln r + K_4$$

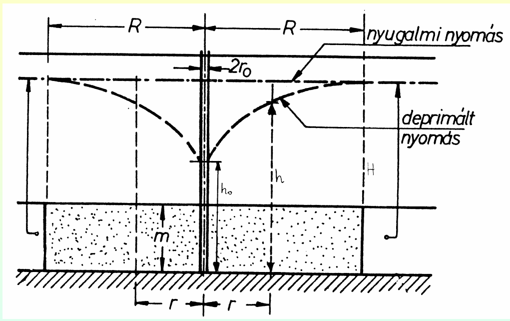
Peremfeltételekből:

$$K_3 = \frac{H - h_0}{\ln\frac{R}{r_0}} \quad és \quad K_4 = H - \frac{H - h_0}{\ln\frac{R}{r_0}}\ln r_0$$

$$h = \frac{H - h_0}{\ln\frac{R}{r_0}}\ln r + H - \frac{H - h_0}{\ln\frac{R}{r_0}}\ln r_0$$

Szivárgási sebesség:

$$v = kI = k\frac{dh}{dr} = k\frac{H - h_0}{\ln\frac{R}{r_0}}\frac{1}{r}$$



Kúthozam az r sugarú paláston beáramló vízmennyiség:

$$Q = Av = 2r\pi m \cdot v = 2k\pi m\frac{H - h_0}{\ln\frac{R}{r_0}}$$

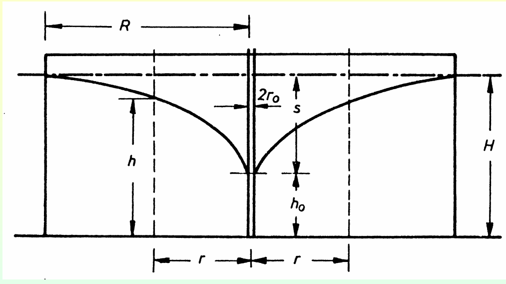
Analitikus megoldások – Dupuit-Thiem
Magányos kút, nyílttükrű rendszer

Kúthozam:

$$Q = 2r\pi hv = 2r\pi h \cdot kI = 2r\pi kh\frac{dh}{dr}$$

$$\int_{r_0}^{R}\frac{1}{r}dr = \frac{2\pi k}{Q}\int_{h_0}^{H}hdh$$

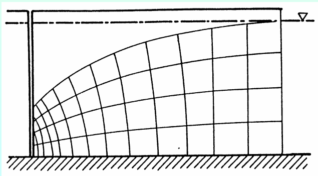
$$Q = k\pi\frac{H^2 - h_0^2}{\ln\frac{R}{r_0}}$$



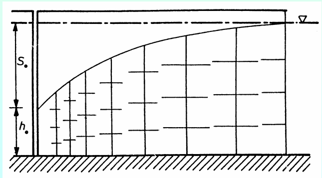
Depresszió-görbe egyenlete:

$$h = \sqrt{\frac{Q}{k\pi}\ln\frac{r}{r_0} + h_0^2}$$

Valós áramkép



Közelítő áramkép



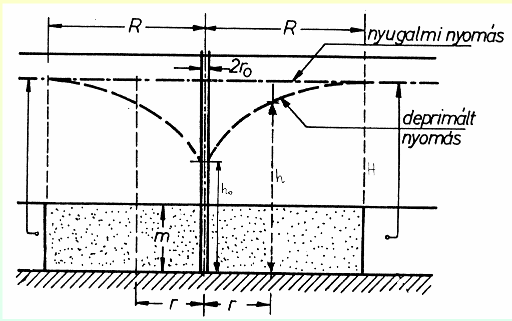
Analitikus megoldások - Theis
Magányos kút, zárt tükrű rendszer, nem permanens eset

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S\partial h}{T\partial t}, \text{ mert } \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Polár koordináta-rendszerre áttérve:

$$\frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right)$$

$$\frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right) \qquad s = H - h$$



Kezdeti és peremfeltételek:

$$s(t, r = \infty) = 0 \quad s(t = 0, r) = 0$$

$$Q = 2\pi Tr\frac{\partial s}{\partial r}, \text{ ha } t > 0$$

Megoldás (C.V.Theis):

$$s(t,r) = \frac{Q}{4T\pi}F(u), \text{ ahol } F(u) = \int_u^\infty e^{-u}\frac{du}{u} \text{ és } u = \frac{Sr^2}{4Tt}$$

F(u) sorbafejtéssel közelíthető:

$$F(u) = -0{,}5772 - \ln(u) + u - \frac{u^2}{2\cdot 2!} + \frac{u^3}{3\cdot 3!} - \ldots + \ldots -$$

Hidrodinamikai paraméterek medencebeli eloszlása

A Laplace egyenlet tárgyalásánál láttuk, hogy ha egy vízadó rendszerben megváltozik a nyomás, akkor a rendszer a változás kiegyenlítésére törekszik. A változás végigfutásának ideje számítható.

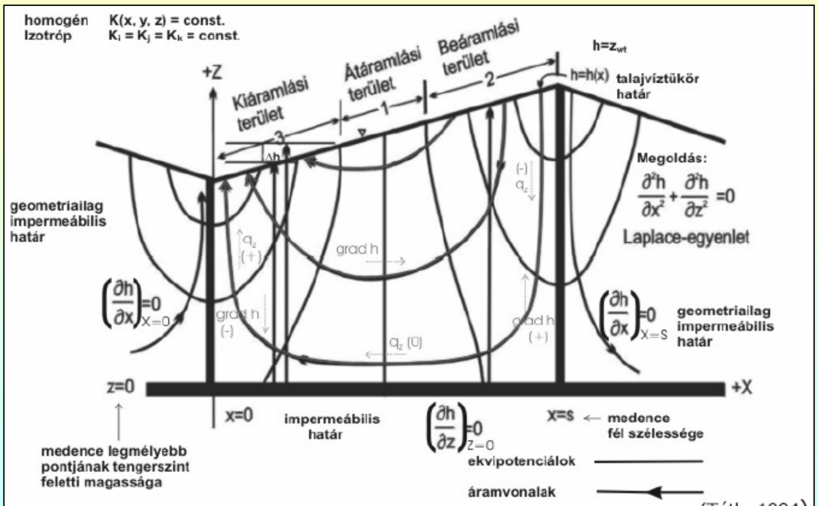
Az egyszerűbb tárgyalás érdekében két dimenzióban vizsgáljuk az áramlási rendszereket. Továbbiakban Tóth József (1963) terminológiáját követjük.

Vegyük fel az Egység Medencét (Unit Basin), mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- egyenes lejtő határolja (a víztükör is egyenes lejtésű!),
- homogén (egyféle tulajdonságú üledék alkotja),
- izotróp (fizikai tulajdonságai a tér minden irányában azonosak),
- impermeábilis határokat tételezünk fel, kivéve a felszínt (alulról és oldalról nincs hozzááramlás sem eláramlás, csak a felszíni csapadék táplálja és ez a mennyiség el is távozik a felszínen keresztül.

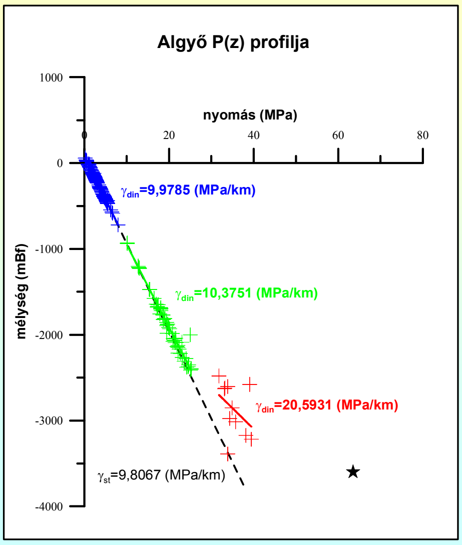
Ezek a feltételek talán túl szigorúak, azonban az egyszerűsítések következtében az áramlási rendszerek matematikailag is értelmezhetővé válnak. Azonkívül a nagy üledékes medencékre jó közelítést ad.

Egység medence képe az áramvonalakkal



(Tóth, 1984)

Nyomás-mélység profilok



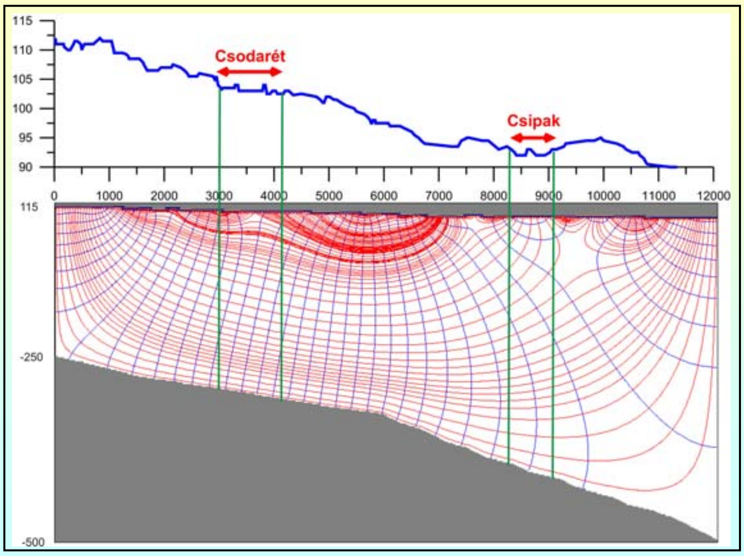
Ha a mélység függvényében ábrázoljuk a nyomást a beáramlási területek és a megcsapolási területek elkülöníthetők.

A megcsapolási zónában minél mélyebbre fúrunk annál nagyobb a nyomás a hidrosztatikusnál, a tápterületen pedig fordítva: minél mélyebbre fúrunk annál alacsonyabb!

A középvonaltól való eltérést dinamikus nyomásemelkedésnek nevezzük:

$$\Delta p = p_{valós} - p_{középvonal}$$

Egymásba ágyazott áramlási rendszerek



6. rész
A szivárgás alapegyenletének numerikus megoldási lehetőségei

A szivárgás alapegyenletének megoldási módjai

- **Analitikus megoldások**
  - Valódi analitikus megoldások
    - Dupuit-Thiem megoldás
  - Szemi-analitikus megoldások
    - Theis-Jacob megoldás
    - Hantush-féle megoldás
    - Neumann-féle megoldás
    - Tóth-féle megoldás
    - …
- **Numerikus megoldások**
  - Szemi-numerikus megoldások
    - Analitikus elemek módszere
    - Halász-Szőke-féle rétegzett tároló modell (ARV)
    - …
  - Valódi numerikus megoldások
    - Véges differencia-módszer
    - Végeselem módszer
    - Peremelem-módszer

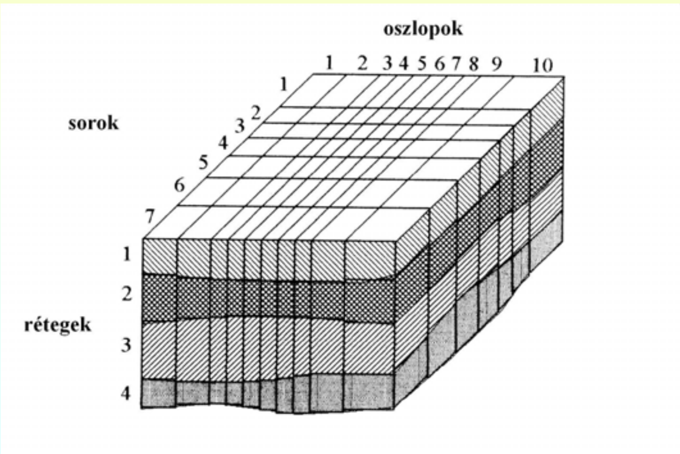
Numerikus megoldások – Véges differencia módszer

A számítási eljárás alkalmazásának jellegzetes lépései:

- A modellezett teret egymással hézagmentesen érintkező, téglatest alakú elemekre bontjuk
- A szivárgás alapegyenletét (a differenciál-egyenletet) differencia-egyenletté alakítjuk.
- Meghatározzuk az egyes hasábelemek és az azokkal közvetlenül érintkező elemek közötti vízhozamokat a Darcy-törvény és a kontinuitási tétel felhasználásával,
- Meghatározzuk az egyes kutak, galériák, szivárgók, felszíni vizek által az egyes elemekbe táplált vagy onnan kivett hozamokat
- Összegezzük minden egyes elemre a vízmérleg-elemeit.
- A hiányzó elemek pótlására a modell szélein peremfeltételeket alkalmazunk.
- Felállítjuk a modellezett tér vízforgalmát az adott időlépcsőben leíró lineáris egyenletrendszert
- Egyenletrendszer megoldása, eredmény: vízmérleg aktívum vagy passzívum
- Meghatározzuk az elemben bekövetkező vízszint (nyílt tükrű rendszer) vagy nyomásszint (zárt tükrű rendszer) változásokat.
- Nem permanens rendszerben a következő időlépcsőre megismételjük a számítást.

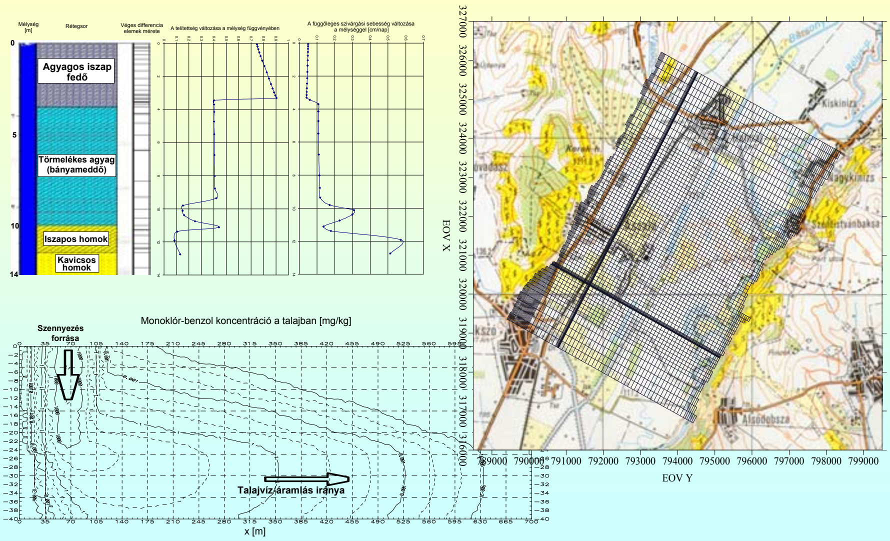
Numerikus megoldások – Véges differencia módszer

A modellezett tér elemekre bontása



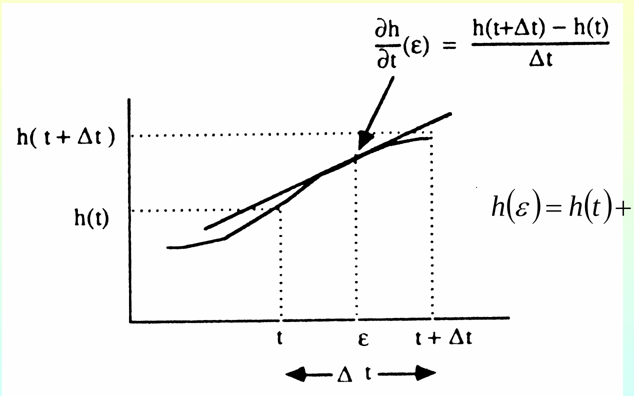
Numerikus megoldások – Véges differencia módszer

A modellezett tér elemekre bontása



Numerikus megoldások – Véges differencia módszer

A differenciálegyenlet differenciaegyenletekké történő alakítása $\frac{\partial h}{\partial x} \Rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta x}$

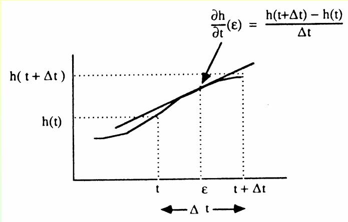


$$h(\varepsilon) = h(t) + (\varepsilon - t)\frac{\partial h}{\partial t}(\varepsilon)$$

h=h(t) függvény időszerinti deriváltját kiszámíthatjuk egy a [t, t+Δt] időintervallumon belül található ε időpillanatban, az időintervallum két végpontjában észlelt h(t) és h(t+Δt) értékek alapján

Numerikus megoldások – Véges differencia módszer

A differenciálegyenlet differenciaegyenletekké történő alakítása



$$h(\varepsilon) = h(t) + (\varepsilon - t)\frac{\partial h}{\partial t}(\varepsilon)$$

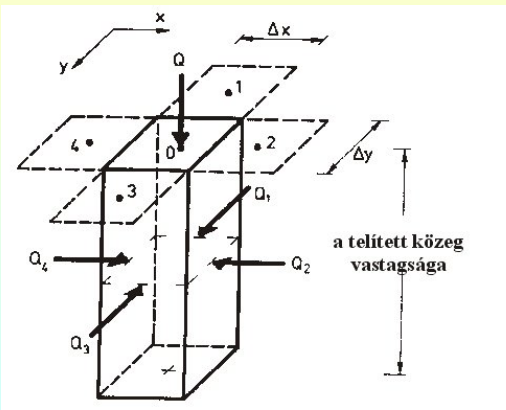
Legyen $\omega=(\varepsilon-t)/\Delta t$, ekkor differencia-egyenletté alakítva:

$$h(\varepsilon) = (1-\omega)\cdot h(t) + \omega \cdot h(t+\Delta t)$$

ω	**ε időpont a [t, t+Δt] időintervallum**	Módszer neve
0	Elején	**Előrelépéses differenciák (Forward difference method)**
0,5	Közepén	**Középponti differenciák (Forward difference method)**
1	Végén	**Hátralépéses differenciák (Backward difference method)**

Numerikus megoldások – Véges differencia módszer

A cellák vízmérlege



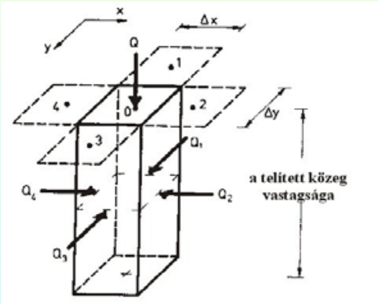
$$\Delta t(Q_0 + Q_{10} + Q_{20} + Q_{30} + Q_{40}) =$$
$$= (h_0(t+\Delta t) - h_0(t))\cdot S \cdot \Delta x \Delta y$$

$$\Delta x \cdot T_{10}\frac{h_1(t_i)-h_0(t_i)}{\Delta y} + \Delta y \cdot T_{20}\frac{h_2(t_i)-h_0(t_i)}{\Delta x} +$$
$$+\Delta x \cdot T_{30}\frac{h_3(t_i)-h_0(t_i)}{\Delta y} + \Delta y \cdot T_{40}\frac{h_4(t_i)-h_0(t_i)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{(h_0(t+\Delta t) - h_0(t))\cdot S \cdot \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

Numerikus megoldások – Véges differencia módszer

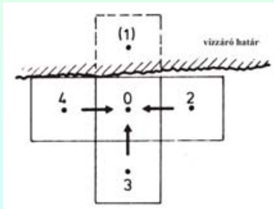
„Átlagos” transzmisszivitások számítása

$$T_{10}=\frac{\frac{\Delta y_0+\Delta y_1}{2}}{\frac{\frac{\Delta y_0}{2}}{T_0}+\frac{\frac{\Delta y_1}{2}}{T_1}};T_{20}=\frac{\frac{\Delta x_0+\Delta x_2}{2}}{\frac{\frac{\Delta x_0}{2}}{T_0}+\frac{\frac{\Delta x_2}{2}}{T_2}};T_{30}=\frac{\frac{\Delta y_0+\Delta y_3}{2}}{\frac{\frac{\Delta y_0}{2}}{T_0}+\frac{\frac{\Delta y_3}{2}}{T_3}};T_{40}=\frac{\frac{\Delta x_0+\Delta x_4}{2}}{\frac{\frac{\Delta x_0}{2}}{T_0}+\frac{\frac{\Delta x_4}{2}}{T_4}}$$



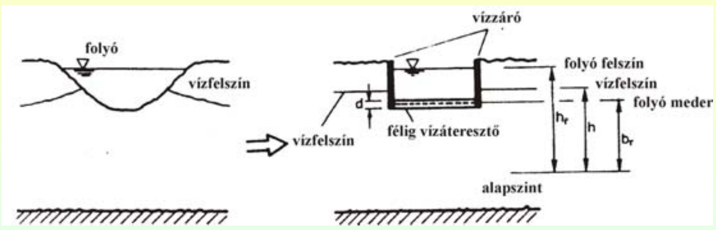
$$T_{i0}=\frac{2\cdot T_i\cdot T_0}{T_i+T_0}$$

$$T_{i0}=\frac{T_i+T_0}{2}$$



Numerikus megoldások – Véges differencia módszer

Folyók és drének (szivárgók) szimulációja



Folyó:

$$Q_f=\frac{k_k}{d}\left(h_r-h\right)\cdot\Delta x\Delta y$$

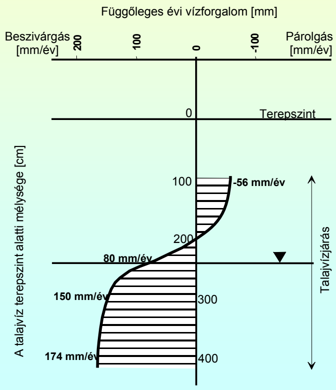
$$Q_f=\frac{k_k}{d}\left(h_r-h\right)\cdot\Delta x\Delta y\frac{F_{folyó}}{\Delta x\Delta y}=\frac{k_k}{d}\left(h_r-h\right)\cdot F_{folyó}$$

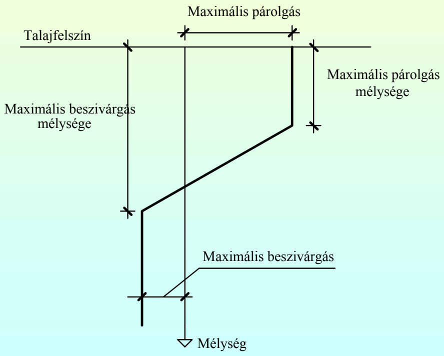
Szivárgó:

$$Q_d=-C_d\left(h-h_d\right)\quad ha\quad h\geq h_d \qquad C_d=k_d\cdot L$$

Beszivárgás

A maradó beszivárgás a beszivárgás és az evapotranspiráció különbsége [L/T]. A hidrodinamikai modellezés egyik legnehezebben meghatározható paramétere. Meghatározása liziméteres mérésekkel, empirikus összefüggésekkel és terepi kútcsoportos vizsgálattal lehetséges.



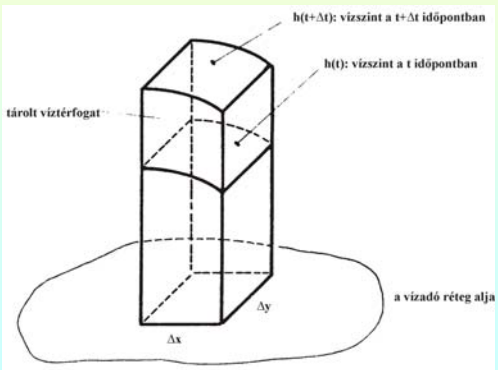


Numerikus megoldások – Véges differencia módszer

Teljes vízmérleg:

$$\Delta x \cdot T_{10} \frac{h_1(t_i) - h_0(t_i)}{\Delta y} + \Delta y \cdot T_{20} \frac{h_2(t_i) - h_0(t_i)}{\Delta x} + \Delta x \cdot T_{30} \frac{h_3(t_i) - h_0(t_i)}{\Delta y} +$$

$$+ \Delta y \cdot T_{40} \frac{h_4(t_i) - h_0(t_i)}{\Delta x} + Q_f + Q_d + Q_B + Q_{kút} = \frac{\left(h_0(t+\Delta t) - h_0(t)\right) \cdot S \cdot \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$



Numerikus megoldások – Véges differencia módszer

Kezdeti feltétel: nyomásszint-eloszlás t_0 időpontban

Peremfeltételek

- Állandó nyomásszintű határ (Dirichlet)
- Ismert vízhozamú határ (Neumann)
  - állandó vízhozam
  - vízzáró határ
- Vegyes peremfeltétel
  - folyó jellegű határ
  - GHB határ $Q_{GHB} = C_{GHB}(h - h_m)$
  - ismert módon változó vízszint
  - Ismert időintervallumban aktív határ

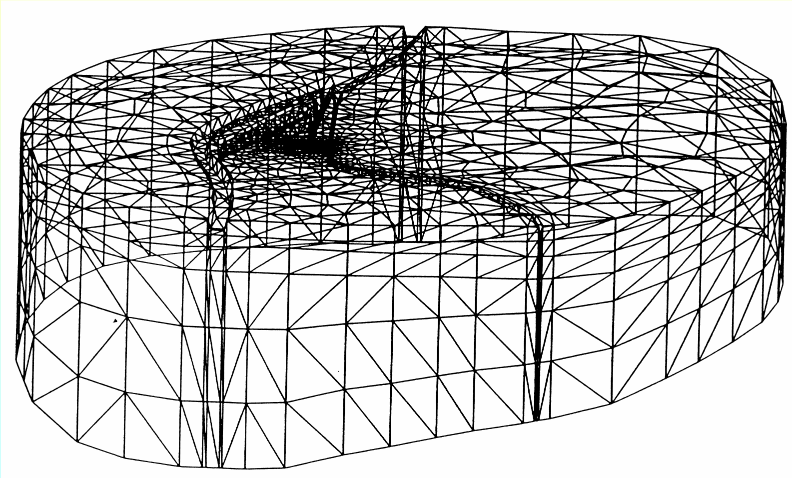
Numerikus megoldások – Végeselem módszer

A módszer néhány jellemzője:

- A vizsgált tér elemekre bontása
- Az elemek alakja tetszőleges, de matematikailag leírható
- Az elemek nem oldalaikkal, hanem csomópontjaikkal kapcsolódnak egymáshoz
- Eltérő dimenziószámú elemek lehetnek egy rendszeren belül

Numerikus megoldások – Végeselem módszer

A vizsgált tér elemekre bontása

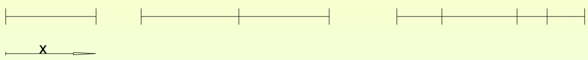


Numerikus megoldások – Végeselem módszer

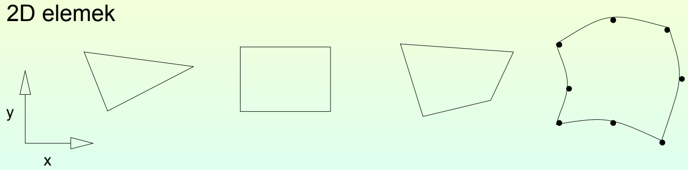
Az elemek alakja tetszőleges, de matematikailag leírható

Elemek és elemcsaládok

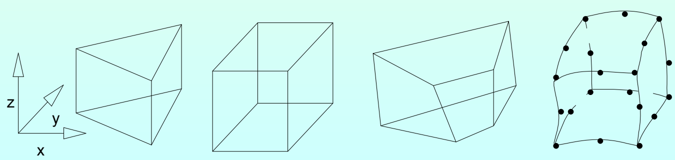
1D elemek



2D elemek

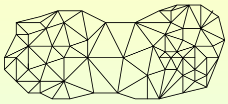


3D elemek

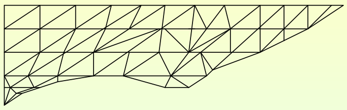


Numerikus megoldások – Végeselem módszer

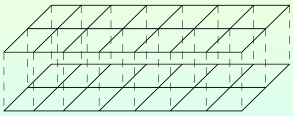
Az elemek nem oldalaikkal, hanem csomópontjaikkal kapcsolódnak egymáshoz
Eltérő dimenziószámú elemek lehetnek egy rendszeren belül



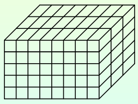
Vizszintes síkmodell



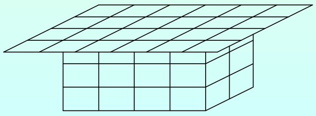
Függőleges síkmodell (szelvénymodell)



Többrétegű síkmodell



Térmodell



Kombinált (2D-3D) modell

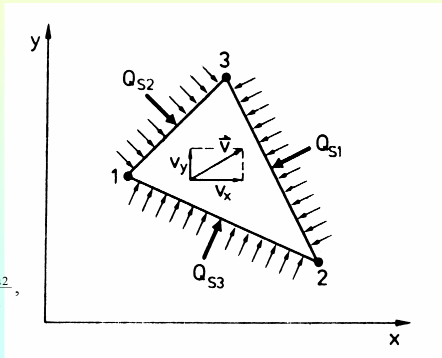
Numerikus megoldások – Végeselem módszer

- Az elemeken belül a gradiens állandó – szomszédos elemek mentén változik
-A vízmérleg sérül !!!
-Megoldás: csomóponti hozamok bevezetése

Vezessük be a W_i csomóponti áramlás fogalmát, úgy, hogy az egyes csomópontokhoz hozzárendeljük a szomszédos oldalakon átáramló hozamok felét. A kontinuitás törvénye miatt az elemre igaz kell, hogy legyen:

$$W_1 = \frac{Q_{s3}}{2} + \frac{Q_{s2}}{2} = -\frac{Q_{s1}}{2},\quad W_2 = \frac{Q_{s3}}{2} + \frac{Q_{s1}}{2} = -\frac{Q_{s2}}{2},$$

$$W_3 = \frac{Q_{s1}}{2} + \frac{Q_{s2}}{2} = -\frac{Q_{s3}}{2}$$



Numerikus megoldások – Végeselem módszer

Lokális approximáció – globális approximáció

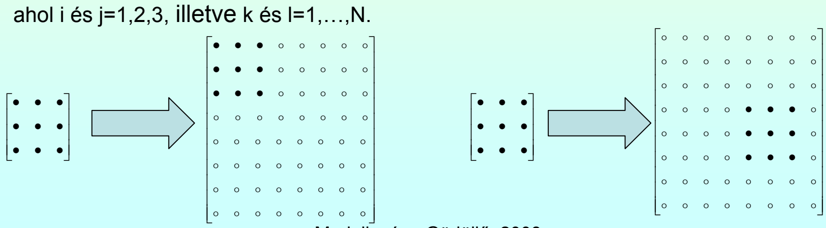
A lokális (elemi) jelölésrendszer kiterjesztését a globális rendszerre az incidencia mátrix segítségével végezzük el. Az incidencia mátrix mutatja meg a csomópont globális k sorszámát az elem e sorszáma és a csomópont i sorszáma függvényében(k=k(e, i)), ahol e=1, 2,…, M és i=1, 2, 3.

$$x_i^e \Rightarrow x_k^g;\quad y_i^e \Rightarrow y_k^g;\quad h_i^e \Rightarrow h_k^g;\quad W_i^e \Rightarrow W_k^g$$

ahol k=k(e,i); i=1,2,3; e=1,2,…,M; k=1,…,N; és e=lokális mátrix, g=globális mátrix.

$$A_i^e \Rightarrow A_k^g;\quad B_i^e \Rightarrow B_k^g;\quad C_i^e \Rightarrow C_k^g;\quad E_{ij}^e \Rightarrow E_{kl}^g$$

ahol i és j=1,2,3, illetve k és l=1,…,N.



Numerikus megoldások – Végeselem módszer

Az elemek nem oldalaikkal, hanem csomópontjaikkal kapcsolódnak egymáshoz
Eltérő dimenziószámú elemek lehetnek egy rendszeren belül

$W_i = \sum_{j=1}^{3} E_{i,j} \cdot h_j$, ahol $E_{i,j} = \dfrac{T\left(B_i B_j + C_i C_j\right)}{2D}$ és ahol i=1,2,3 és j=1,2,3 .

Az elemre vonatkozó egyenlet a globális mátrixok segítségével:

$$W_k^e = \sum_{l=1}^{N} E_{kl}^e \cdot h_l$$

A kontinuitás miatt az összes W_k csomóponti hozam és a csomópontnál kitermelt Q hozamok előjeles összege zérus:

$$\sum_{e=1}^{M} W_k^e + Q_k = 0$$

ahol k=1, 2, …, N, és ahol Q_k az elemben lévő külső (piezometrikus nyomástól független) források és nyelők összes hozama.
Ez egy N darab egyenletből álló egyenlet-rendszer, ahol az N db ismeretlen az N db csomópontbeli h_k nyomásszint.

Numerikus megoldások – Végeselem módszer

Ez egy N darab egyenletből álló egyenlet-rendszer, ahol az N db ismeretlen az N db csomópontbeli h_k nyomásszint.

Az N csomópontú és M elemből álló hálóra:

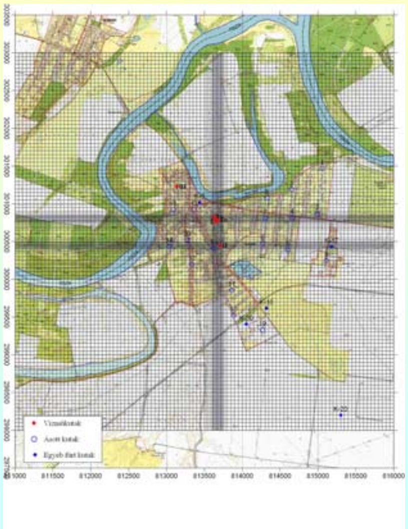
$$\sum_{e=1}^{M}\left[\sum_{l=1}^{N} E_{kl}^{e}\cdot h_l\right]+Q_k=0$$ ahol k=(1, 2, ..., N)

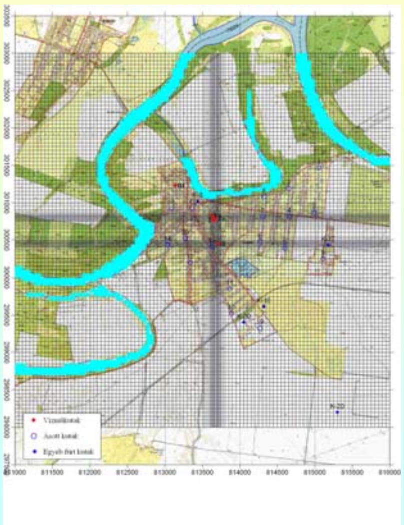
$$\sum_{l=1}^{N}\left[\sum_{e=1}^{M} E_{kl}^{e}\right]\cdot h_l+Q_k=0$$ ahol k=(1, 2, ..., N)

$$\sum_{l=1}^{N} a_{kl}\cdot h_l+Q_k=0$$ k=(1,...,N), ahol $a_{kl}=\sum_{e=1}^{M} E_{kl}^{e}$

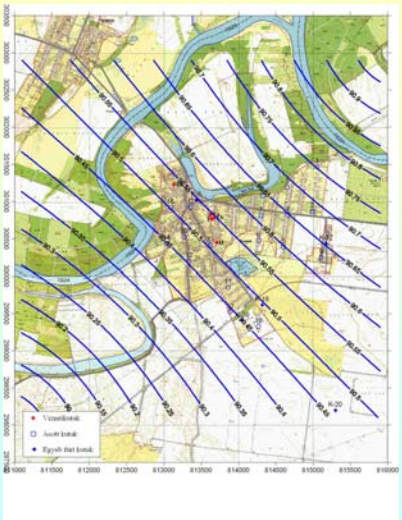
Példa – A terület

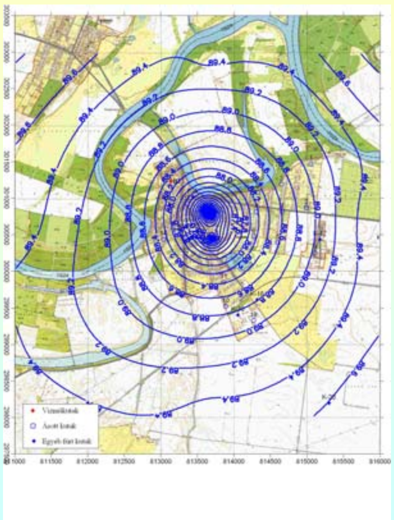
Példa – Rácsháló és folyóelemek





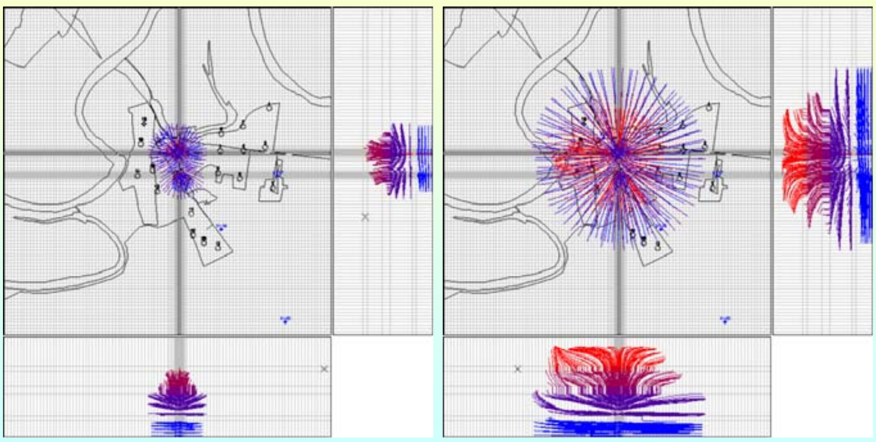
Példa – Nyugalmi és üzemi vízszintek



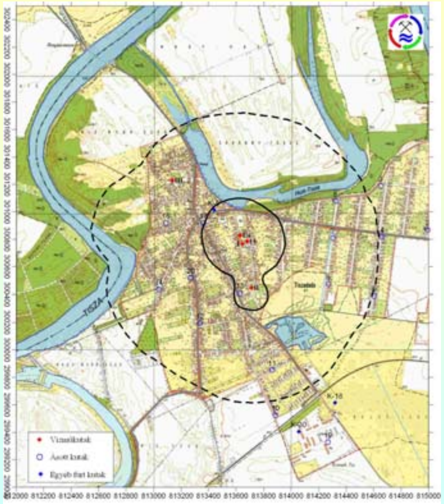


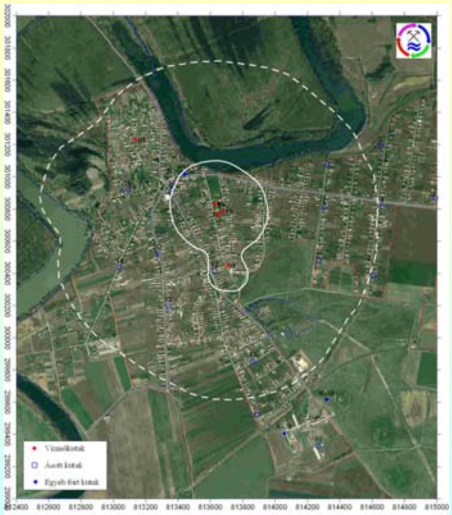
Példa – Áramvonalak I.

Példa – Áramvonalak II.



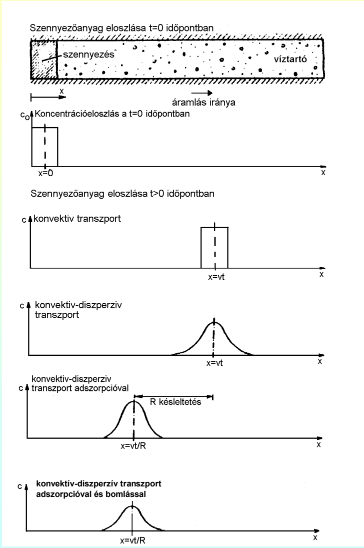
Példa - Védőövezetek





7. rész
A szennyeződés terjedés elemei, a transzport-egyenlet

Szennyeződés terjedés elemei



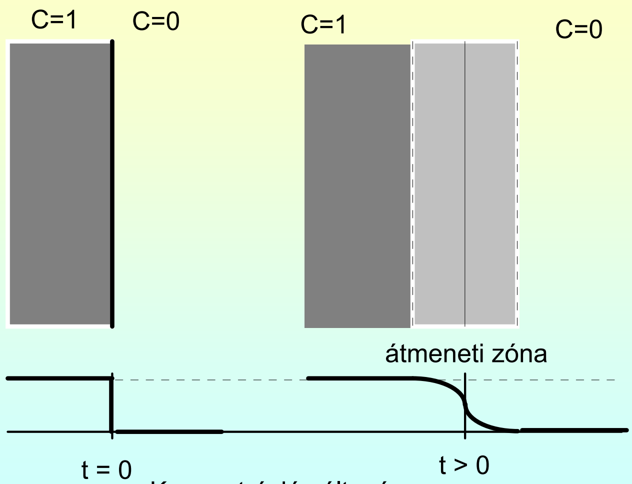
Advekció

- *Az oldott anyagok vízzel való együttes tömeges áramlását advekciónak, illetve a hőtanból kissé helytelenül átvéve konvekciónak nevezzük*. (konvekció: hőmérsékleti különbségek hatására létrejövő mozgási folyamat; advekció: a potenciálos - és a hőt kizáró - erőtér által létrejött mozgási folyamat. Az advektív szennyezőanyag-áram a közegbeli v átlagos áramlási sebesség és a C koncentráció szorzata, azaz:

$$F_{x,konv.} = \frac{dM_{x1}}{dydzdt} = v_x C, \quad F_{y,konv.} = \frac{dM_{y1}}{dxdzdt} = v_y C, \quad F_{z,konv..} = \frac{dM_{z1}}{dxdydt} = v_z C$$

- ahol M a szennyezőanyag kémiai mennyisége és t az eltelt idő.

Szennyezőanyag szóródása - diffúzió



Koncentráció változása

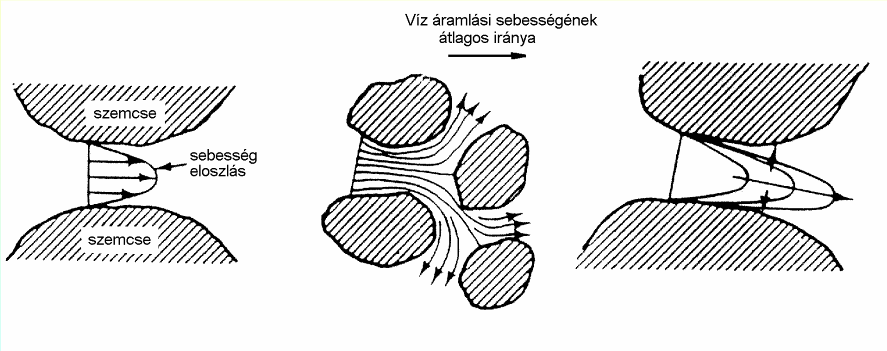
Szennyezőanyag szóródása - diffúzió

A térbeli kémiai potenciál-különbségek hatására létrejövő tömegáramot, melyet Fick I. törvénye ír le, diffúziónak nevezzük. A koncentráció-különbségek hatására létrejövő diffúziót közönséges diffúziónak, míg az elektromos potenciál- vagy hőmérséklet-különbségek okozta anyagáramokat kényszerdiffúziónak nevezzük. Fick I. törvénye értelmében a diffúzió miatt kialakuló kémiai anyagfluxus három komponense - porózus közegben - az alábbi formában írható fel:

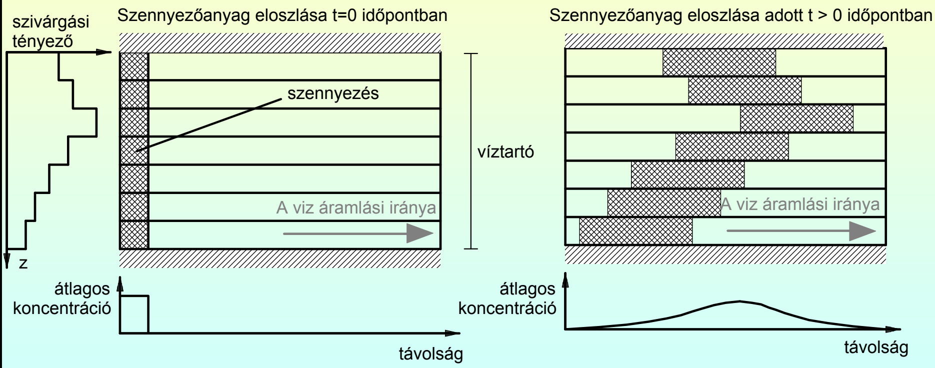
$$F_{x,diff.} = \frac{dM_{x2}}{dydzdt} = -D_{eff}\frac{\partial C}{\partial x} \quad F_{y,diff} = \frac{dM_{y2}}{dxdzdt} = -D_{eff}\frac{\partial C}{\partial y} \quad F_{z,diff} = \frac{dM_{z2}}{dxdydt} = -D_{eff}\frac{\partial C}{\partial z}$$

ahol Deff az effektív (vagy látszólagos) diffúzió-állandó, amelynek értéke porózus közegben kisebb, mint a vizes közegben mért D0 diffúzió-állandó.

Szennyezőanyag szóródása – diszperzió (hidrodinamikai diszperzió)



Szennyezőanyag szóródása – diszperzió (makrodiszperzió)



Szennyezőanyag szóródása – diszperzió

Homogén az áramlási sebességtérben (a víz szivárgása x irányú) a diszperzív fluxusok:

$$F_{x,\mathrm{Hidrodin.diszp.}} = \frac{dM_{x3}}{dydzdt} = -D_x \frac{\partial}{\partial x}(\Theta C)$$

$$F_{y,\mathrm{Hidrodin.diszp.}} = \frac{dM_{y3}}{dxdzdt} = -D_y \frac{\partial}{\partial y}(\Theta C)$$

$$F_{z,\mathrm{Hidrodin.diszp.}} = \frac{dM_{z3}}{dxdydt} = -D_z \frac{\partial}{\partial z}(\Theta C)$$

$$D_x = \alpha_L \bar{v}_x \,,\; D_y = \alpha_{TH} \bar{v}_x \,,\; D_z = \alpha_{TV} \bar{v}_x$$

Szennyezőanyag megkötődése - szorpció

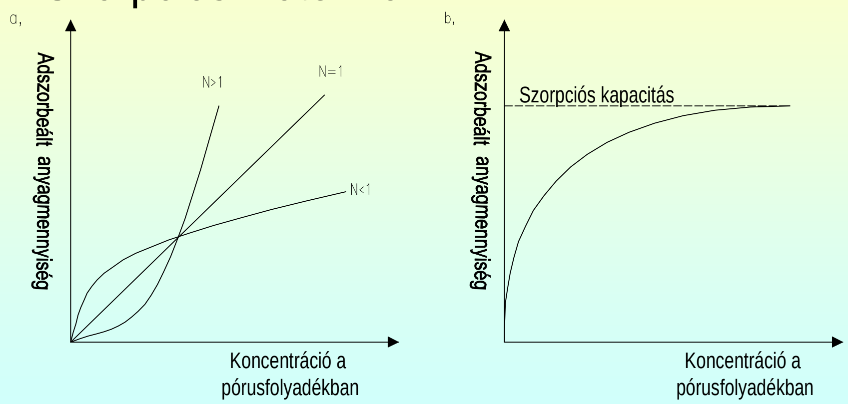
- *Az adszorpció a szennyezőanyag porózus közeg felületén történő reverzibilis megkötődését jelenti.* Ez a folyamat a modellezett tér anyagmérlegében úgy jelenik meg, mint egy időben állandóan változó forrás vagy nyelő, függően attól, hogy az adott koncentrációviszonyok között a megkötődés (adszorpció), vagy a szennyező anyag oldatba jutása (deszorpció) a jellemző.
- Az adszorbeált és deszorbeált anyagmennyiségek egyensúlya:

$$\Theta \cdot dV \frac{\partial C}{\partial t} = -\rho_b \cdot dV \frac{\partial \bar{C}}{\partial t}$$

- ahol C a pórusfolyadék koncentrációja [M/L3], a szennyezőanyag koncentrációja a talajban [M/Mszáraz talaj], b a porózus közeg testsűrűsége [M/L3], a térfogatszázalékban kifejezett víztartalom [-] (amely telített közegben egyenlő a hézagtérfogattal) és V a teljes vizsgált térfogat.

Szennyezőanyag megkötődése - szorpció

- Szorpciós izotermák:



Bomlás

- A bomlási folyamatok a szennyezőanyag degradációjához, mennyiségének időbeli csökkenéséhez vezetnek. Bár *a bomlás két alapvető típusa a kémiai bomlás és a radioaktív bomlás jellegében alapvetően különbözik egymástól*, a szennyezőanyagok terjedésének modellezésekor mégis *azonos matematikai formában vehetők figyelembe*, melynek algebrai alakja:

$$\frac{dM}{dVdt} = \frac{\partial(\Theta C)}{\partial t} = -\lambda(\Theta C + \rho_b K_d C)$$

- ahol a bomlási állandó.

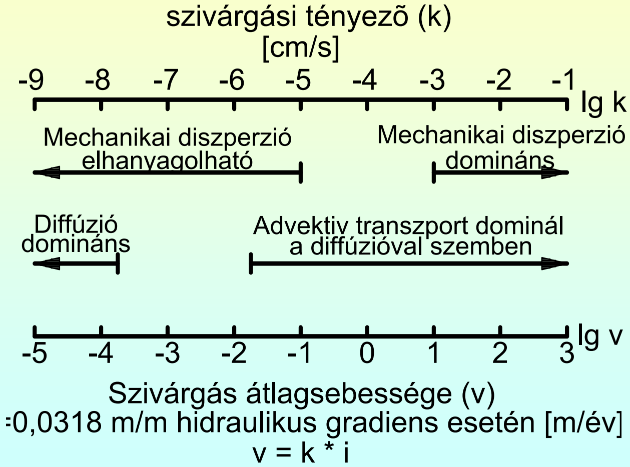
Transzport-egyenlet

$$\frac{dM}{dVdt} = D^*_{xx}\frac{\partial^2(\Theta C)}{\partial x^2} + D^*_{xy}\frac{\partial^2(\Theta C)}{\partial x\partial y} + D^*_{xz}\frac{\partial^2(\Theta C)}{\partial x\partial z} + D^*_{yx}\frac{\partial^2(\Theta C)}{\partial y\partial x} + D^*_{yy}\frac{\partial^2(\Theta C)}{\partial y^2} +$$

$$+ D^*_{yz}\frac{\partial^2(\Theta C)}{\partial y\partial z} + D^*_{zx}\frac{\partial^2(\Theta C)}{\partial z\partial x} + D^*_{yz}\frac{\partial^2(\Theta C)}{\partial z\partial y} + D^*_{zz}\frac{\partial^2(\Theta C)}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x}(v_x C) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y}(v_y C) - \frac{\partial}{\partial z}(v_z C) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho_b K_d C) - \lambda(\Theta C + \rho_b K_d C)$$

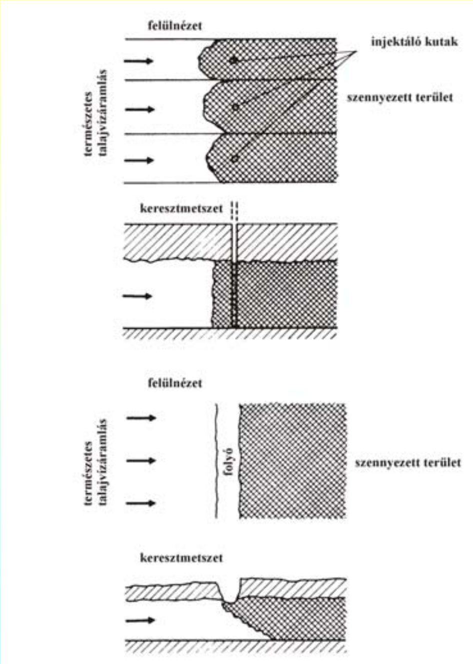
A konvektív transzport, a diffúzió és a mechanikai diszperzió okozta anyagáramok összevetése a szivárgási sebesség (szivárgási tényező) függvényében (ROWE, 1987)



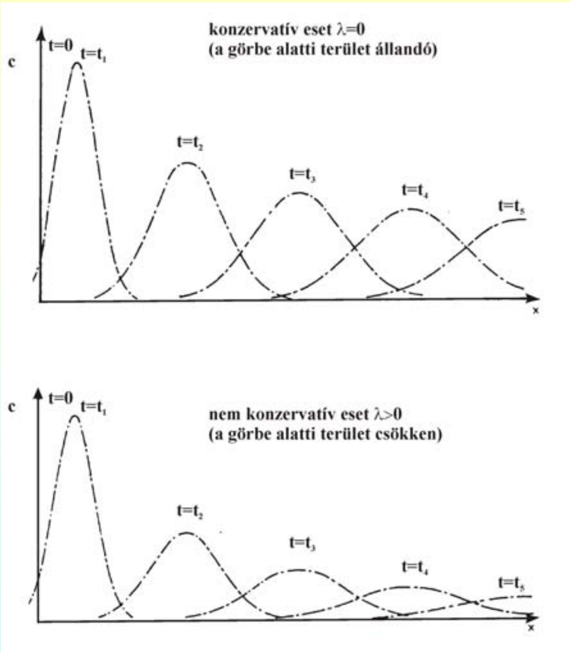
8. rész
A transzport-egyenlet megoldási módjai

A transzport-egyenlet megoldási módjai

- **Analitikus megoldások**
  - Valódi analitikus megoldások
    - Shackelford
    - Csanády
    - Ogata - Banks
    - …
- **Részecske szemléletű megoldások**
    - Karakterisztika módszere
    - Véletlen bolyongás módszere
- **Numerikus megoldások**
    - Véges differencia-módszer
    - Végeselem módszer
    - Peremelem-módszer

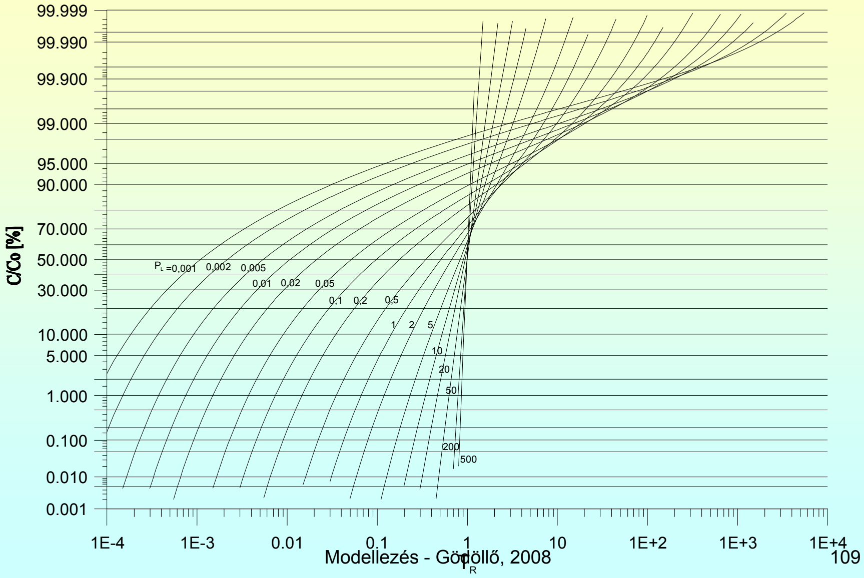


A transzport-egyenlet egydimenziós analitikus megoldásainak alkalmazási területei (SAUTY, 1980)

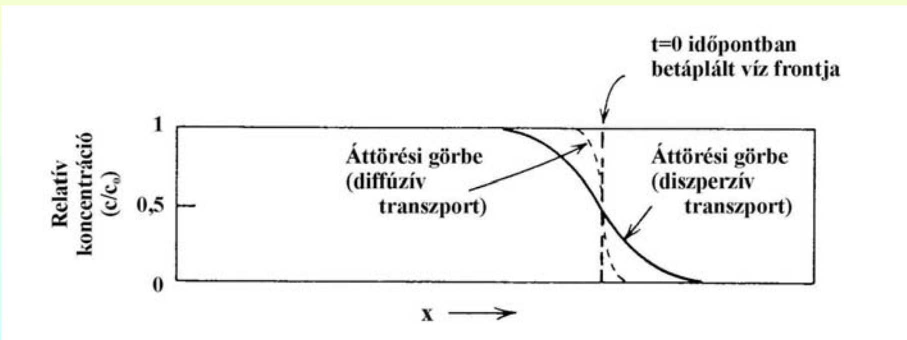


Pillanatnyi szennyeződés terjedésének időbeli lefolyása bomlás nélkül és bomlással

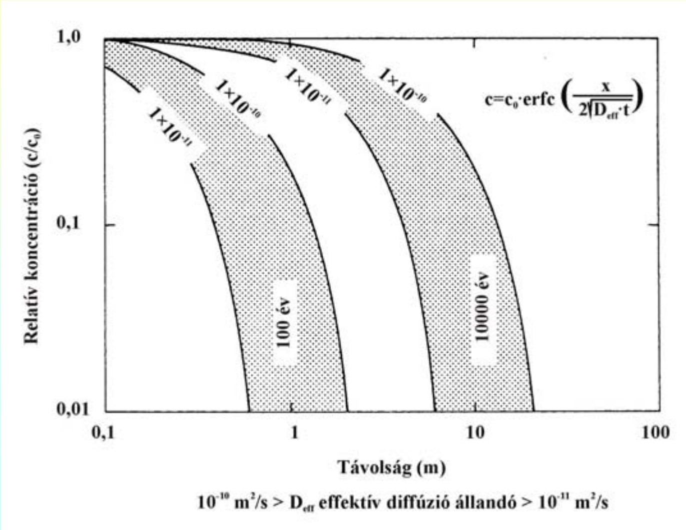
Összefüggés a Courant-szám és a C/C0 relatív koncentráció között (SHACKELFORD, 1990)



Az advektív, advektív-diffúzív és az advektív-diszperzív transzport áttörési görbéinek összehasonlítása (FREEZE – CHERRY, 1979)

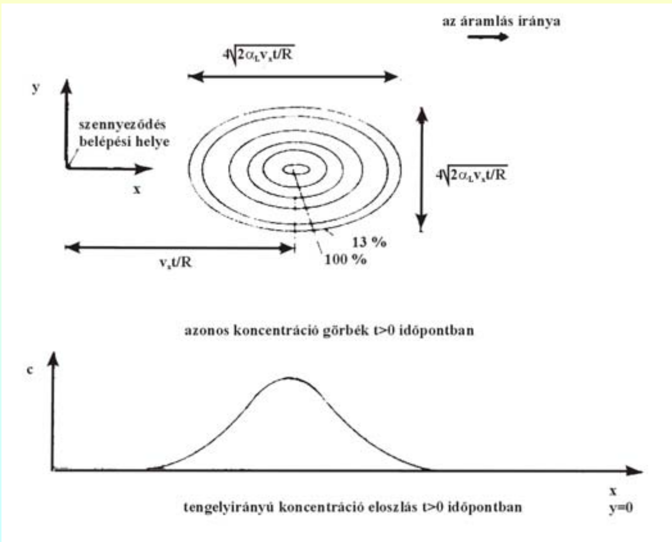


A diffúzív transzport áttörési görbéi 10^{-10} és 10^{-11} m^2/s effektív diffúzió-állandó esetén
(FREEZE – CHERRY, 1979)



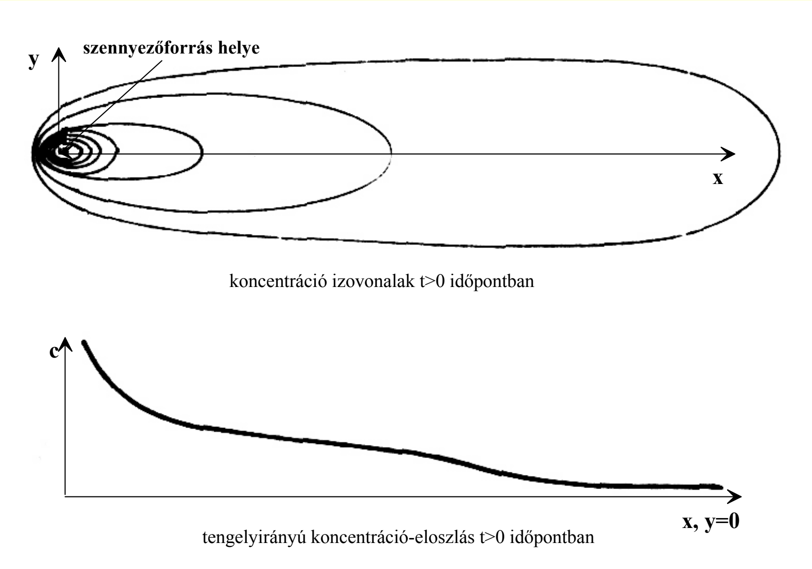
111

Pillanatnyi szennyezőforrás okozta koncentráció-eloszlás

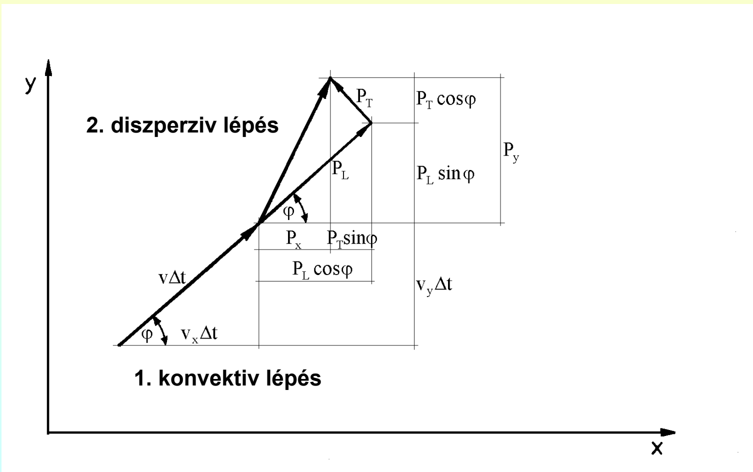


112

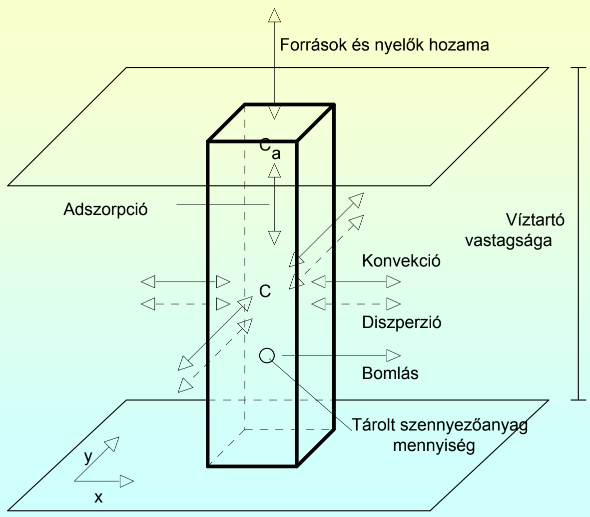
Állandó forrás okozta szennyezőanyag-eloszlás



A részecske mozgása advektív és diszperzív lépések szuperpozíciójaként értelmezve (KINZELBACH, 1986)

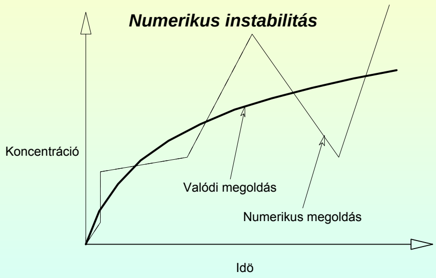


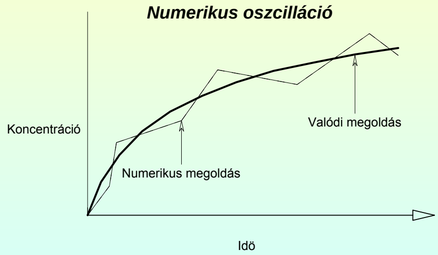
Véges differencia módszer - Szennyezőanyag-mérleg elemei egy kiválasztott elemi hasáb környezetében



9. rész
A numerikus hibák

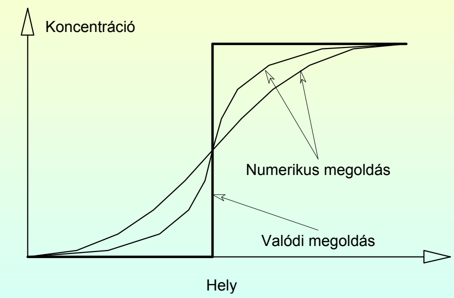
A numerikus megoldások hibái I. - A numerikus instabilitás és a numerikus oszcilláció jelensége a transzportmodellezésnél



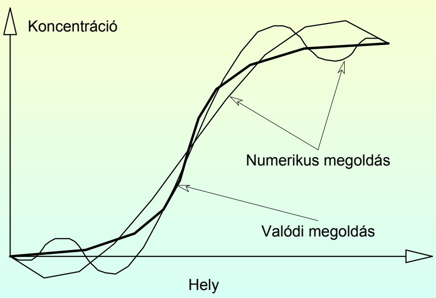


A numerikus megoldások hibái II. - A numerikus diszperzió és az "Undershoot-Overshoot" jelenség

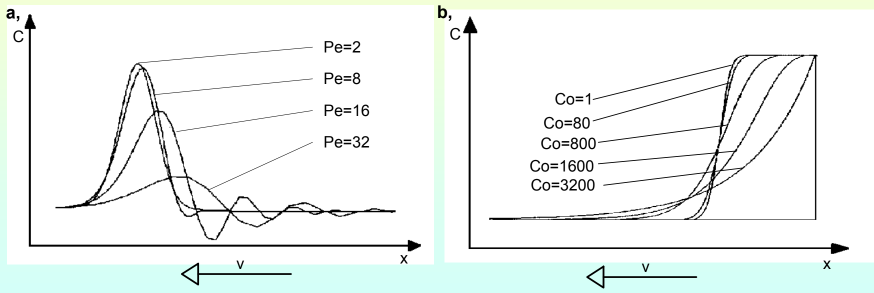
a,



b,



A végeselem módszer numerikus hibái a SICK100 programrendszeren: a koncentráció-eloszlás t=1000 s elteltével, harang alakú kiindulási koncentráció-impulzus, állandó szivárgási sebesség esetén (a, különböző Peclet-számok , b, különböző Courant-számok esetén) (KÖNIG, 1993)

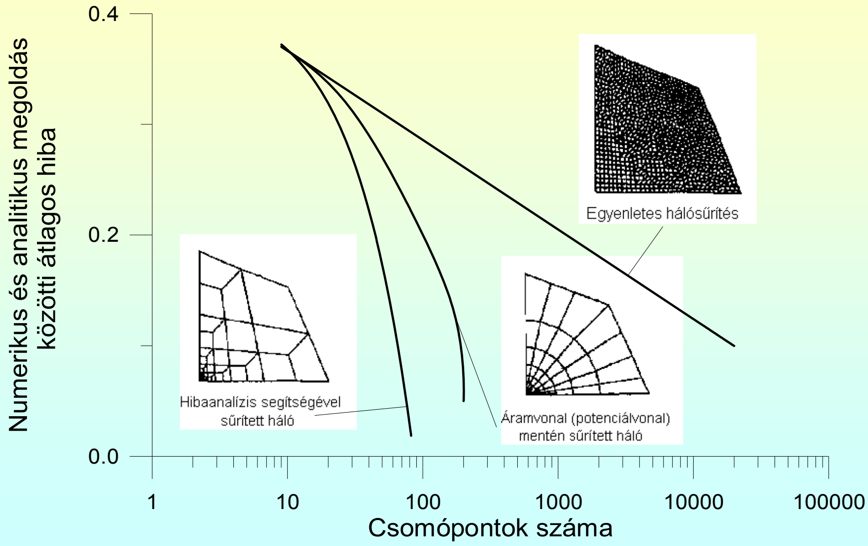


Numerikus hibák csökkentése

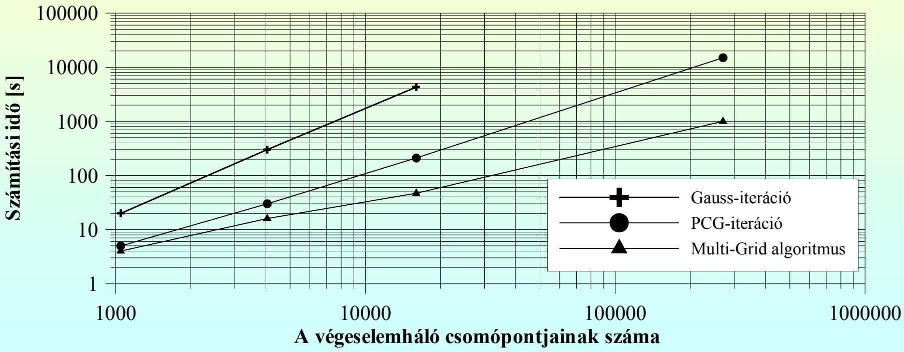
Az egyes paraméterek megváltoztatásának hatása a modellnél fellépő numerikus hibákra

Paraméter változtatás	**Numerikus hibára való hajlam**			
	instabilitás	**oszcilláció**	**diszperzió**	**alálövés-fölélövés**
Előre- vagy hátralépéses differenciák alkalmazása	nő	csökken	nem befolyásolja	nem befolyásolja
Középponti differenciák alkalmazása	csökken	nő	nem befolyásolja	nem befolyásolja
Cella- vagy elemméret csökkentése	nő	nő	nő	nő
Időlépcső növelése	nő	nő	nem befolyásolja	nem befolyásolja
szivárgási sebesség, transzmisszivitás növelése	nő	nő	nő	nő
Források és nyelők hozamának növelése	nő	nő	nem változik	nem változik
Tárolási tényező növelése	csökken	csökken	nem befolyásolja	nem befolyásolja
Diszperzió-állandó, diszperzivitás növelése	nő	nő	csökken	csökken

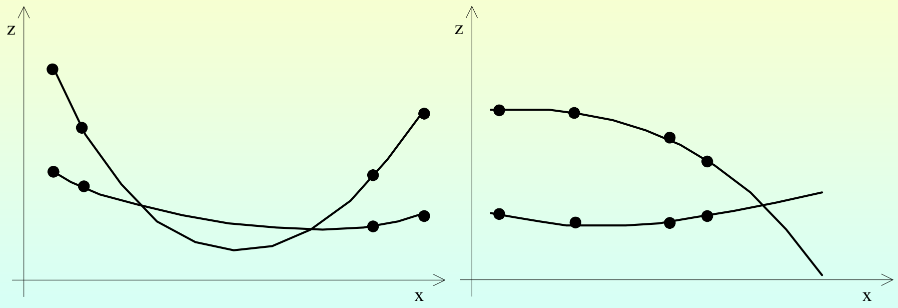
A numerikus modell átlagos hibájának nagysága a hálósűrítési módszer függvényében (KÖNIG, 1993)



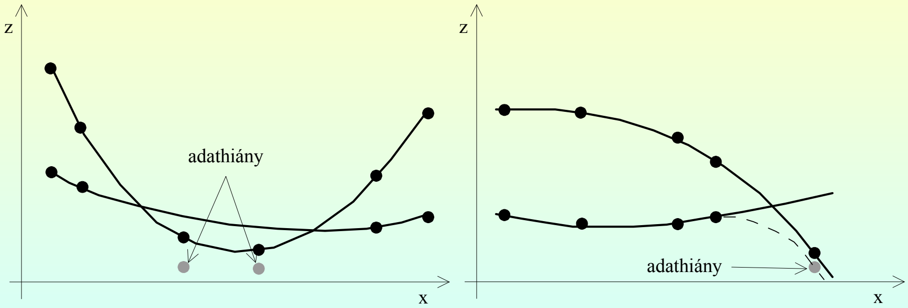
A számításhoz szükséges gépidő a csomópontok számának függvényében különböző megoldó-algoritmusok esetén (KÖNIG, 1993)



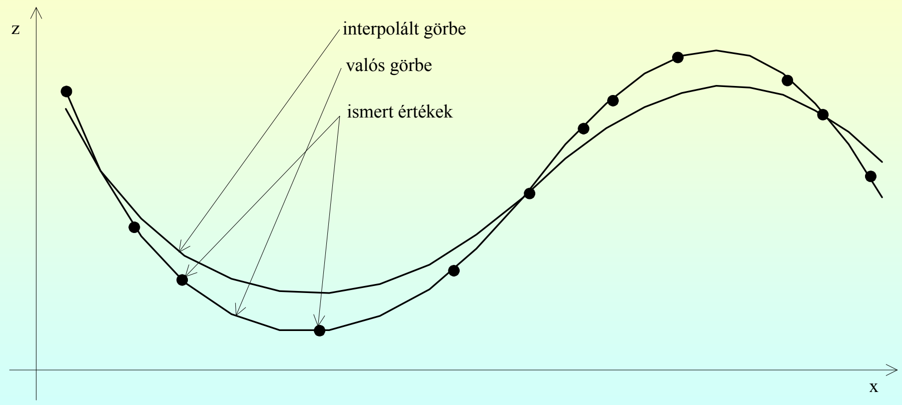
Jellegzetes interpolációs és extrapolációs hibák a minimális görbület módszerének alkalmazásánál



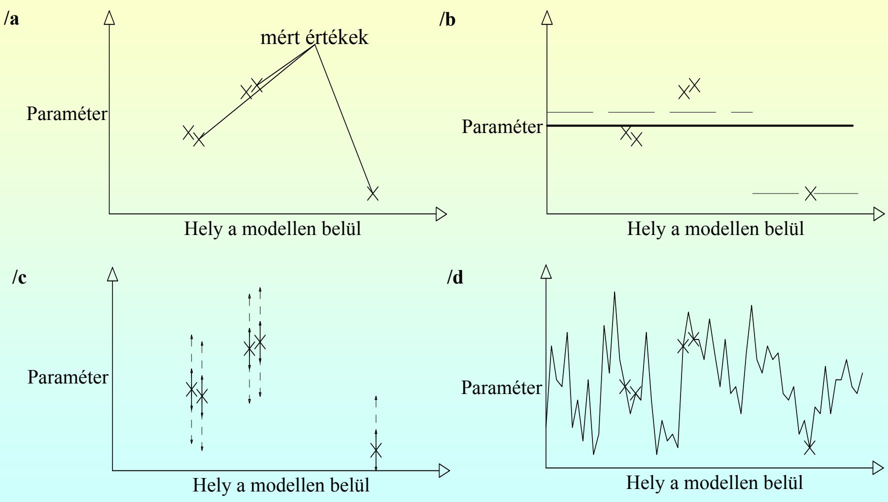
Jellegzetes interpolációs és extrapolációs hibák a adathiányos területeken



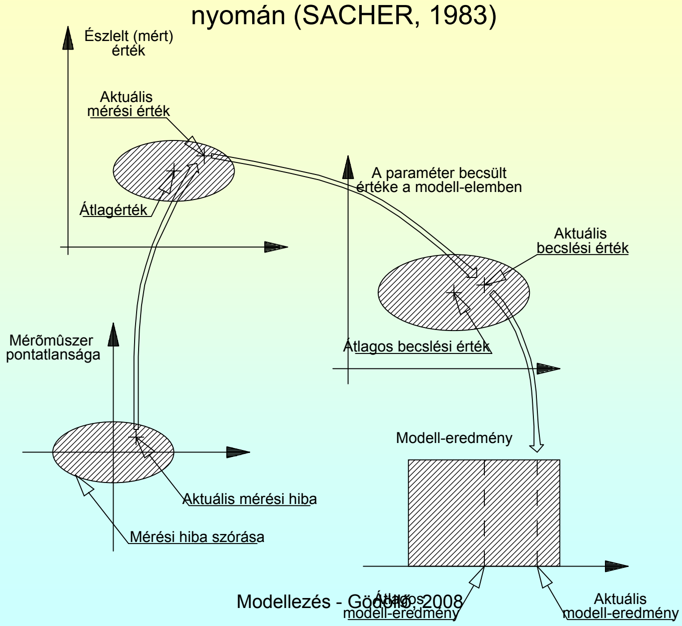
A súlyozott átlagszámítás felület-kiegyenlítő hatása



A paraméterhibák kialakulása (SMITH nyomán) (PECK et al., 1988)

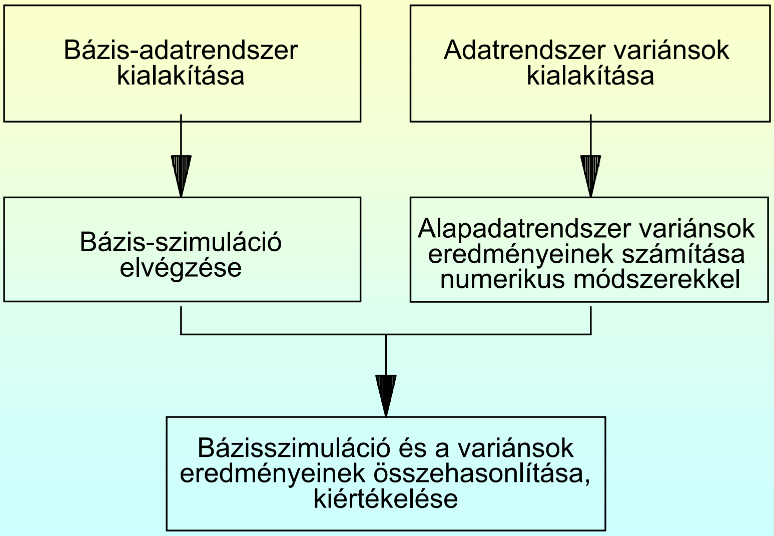


A hibák átöröklődésének sémája Mehra, 1978 és McLaughlin, 1978 nyomán (SACHER, 1983)

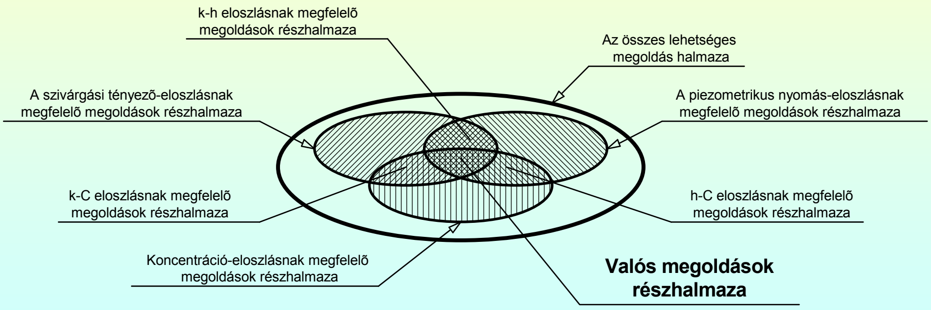


10. rész
Az alapadat-érzékenységi vizsgálat és a kalibráció

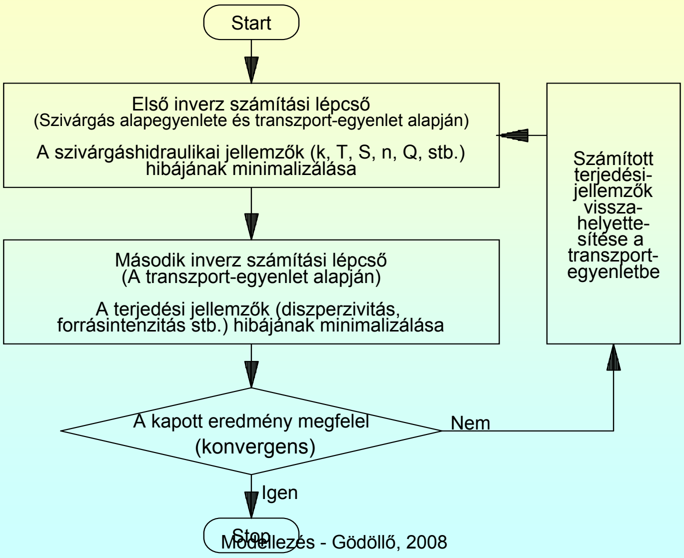
Egy alapadat-érzékenységi vizsgálat menete
HEIDERMANN (1986)



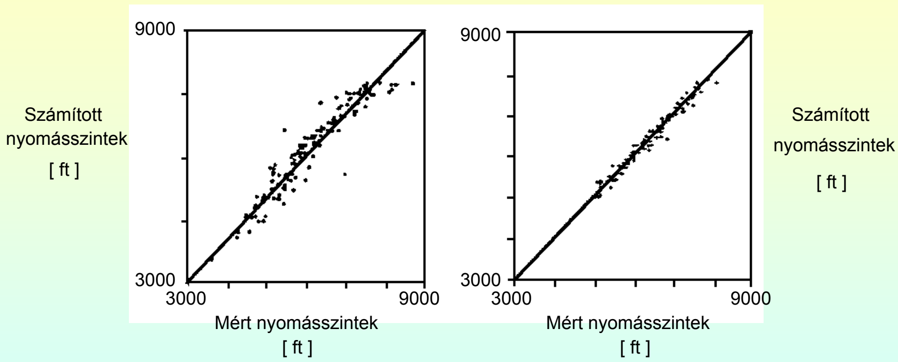
A lehetséges megoldások halmazának szűkítése a kalibrációnál
(van ROOY és ROSBJERG, 1988)



Az összetett kétlépcsős kalibráció sémája (KEIDSER et al., 1990.)

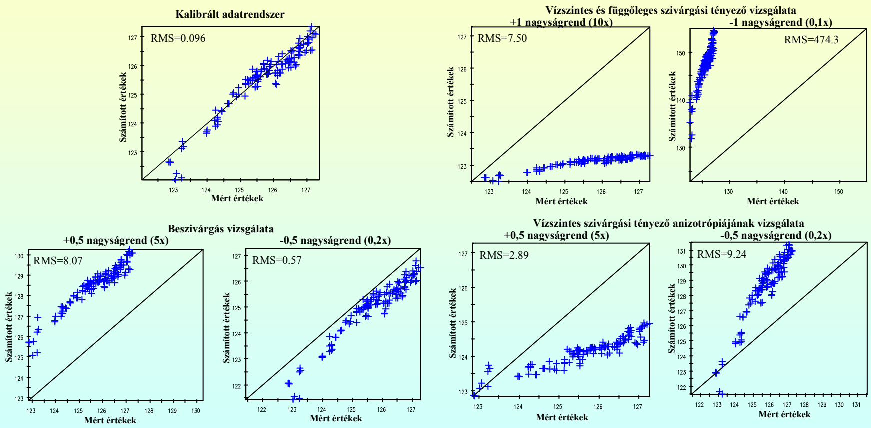


A közvetett és közvetlen kalibráció hatékonyságának összehasonlítása (CARRERA et al., 1989)

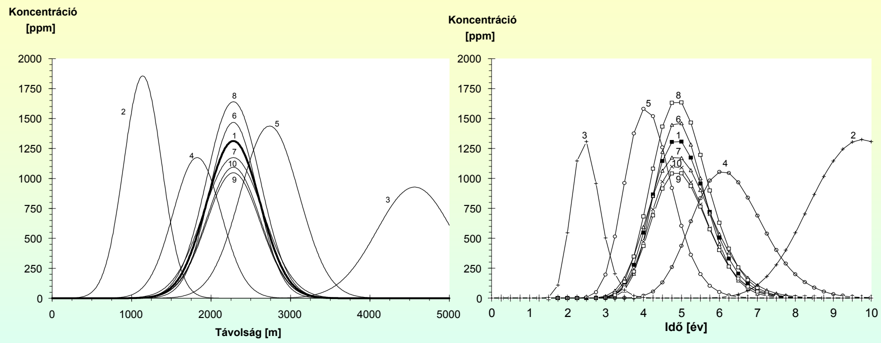


Trial-and-error kalibráció után **Autokalibráció után**

Paraméterérzékenység – hidrodinamikai modell

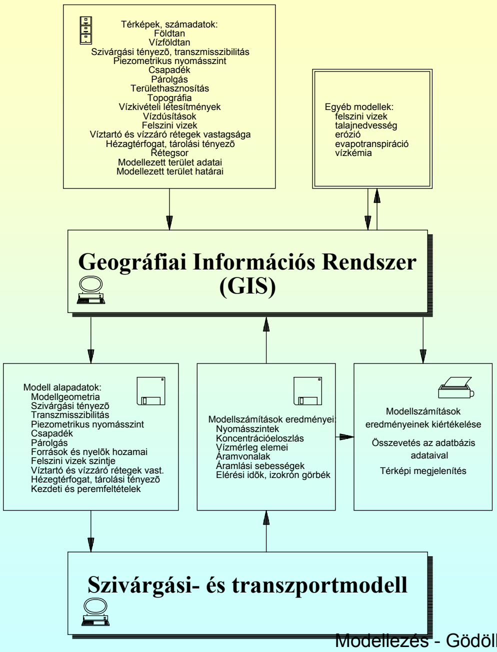


A szennyeződés-terjedési számítások alapadat-érzékenységi vizsgálatának eredményei a szuhogyi lerakó adatrendszerének felhasználásával 1D analitikus megoldás esetén



Alapgörbe (1)
Minimális(2) vagy maximális(3) szivárgási sebesség
Minimális(4) vagy maximális(5) késleltetés
Minimális(6) vagy maximális(7) diszperzivitás
Minimális(8) vagy maximális(9) szabad hézagtérfogat
Maximális bomlási együttható(10)

A, A koncentrációk a forrástól mért távolság függvényében t=5 év időpontban
B, A koncentrációk az eltelt idő függvényében a forrástól mért 2250 m távolságban



Geográfiai Információs Rendszer és a transzportmodell összeillesztése (BIESHEUVEL és HEMKER, 1993)